

ZENTRALBLATT FÜR MATHEMATIK

31. Band, Heft 9

24. November 1949

S. 385—432

Analysis.

Mengenlehre:

Wang, Hao: On Zermelo's and von Neumann's axioms for set theory. Proc. nat. Acad. Sci. USA **35**, 150—155 (1949).

Das Zermelosche und von Neumannsche Axiomensystem für die Mengenlehre werden miteinander verglichen. Das zweite ist offenbar weitergehend. Formuliert man die Zermeloschen Axiome in einem Prädikatenkalkül der ersten Stufe, so erhält man ein dem von Neumannschen äquivalentes System, wenn man den logischen Formalismus bis zum Prädikatenkalkül der zweiten Stufe erweitert.

W. Ackermann (Lüdenscheid).

Fort, M. K.: A specialization of Zorn's lemma. Duke math. J. **15**, 763—765 (1948).

Es sei A eine teilweise geordnete Menge. Ein $a \in A$ heißt eine obere Schranke einer Teilmenge B von A , wenn $b \leq a$ für jedes $b \in B$; eine $a \in A$ heißt maximal, wenn für jedes $a' \in A$ mit $a' \geq a$ gilt $a' \leq a$. Das Zornsche Lemma kann man nun folgendermaßen aussprechen: Wenn jede geordnete Teilmenge von A eine obere Schranke $\in A$ besitzt, so existiert zu jedem $a_0 \in A$ mindestens eine maximales $a \in A$ mit $a_0 \leq a$. Verf. ersetzt die Voraussetzung dieses Lemmas durch folgende schwächere: A ist vom Typus ω , d. h. in jeder geordneten Teilmenge L von A gibt es eine monoton wachsende Teilfolge $a_1 \leq a_2 \leq \dots$, die zu L konfinal ist (d. h. zu jedem $a \in L$ ein $a_i \geq a$ enthält) und jede monoton wachsende Folge hat in A eine obere Schranke. — A ist sicher dann vom Typus ω , wenn auf jeder geordneten Teilmenge L von A eine reell-wertige Funktion f existiert derart, daß $f(a) < f(b)$ gilt dann und nur dann, wenn $a < b$ ist. — Als Anwendung des spezialisierten Lemmas gibt Verf. neue Beweise einiger bekannter Sätze über vollständig additive Mengenfunktionen (z. B. für den Satz von Radon-Nikodym über die Darstellbarkeit jeder absolut stetigen Mengenfunktion als Lebesguesches Integral).

Nöbeling (Erlangen).

Sierpiński, Waclaw: Sur les ensembles presque contenus les uns dans les autres. Fundam. Math., Warszawa **35**, 141—150 (1948).

Sind E, H zwei beliebige Mengen und ist die Menge $E - H$ endlich oder leer, so sagt Verf., die Menge E sei in H fast enthalten, in Zeichen: $E * \subset H$. Es gilt der Einschaltungssatz: Sind E_1, E_2, \dots und H_1, H_2, \dots zwei Folgen von Mengen derart, daß $E_p * \subset H_q$ für beliebige p, q gilt, so gibt es eine Menge X derart, daß $E_p * \subset X * \subset H_q$ für beliebige p, q gilt. Der Satz bleibt nicht mehr gültig, wenn die Folgen von Mengen durch allgemeinere Familien von Mengen ersetzt werden. — Weiter beschäftigt Verf. sich mit Sätzen und Problemen von Lusin [dies. Zbl. **29**, 347]. Z. B. nennt Lusin zwei Mengen orthogonal, wenn sie höchstens endlich viele Elemente gemein haben; zwei Familien F_1, F_2 von Mengen orthogonal, wenn für $E_1 \in F_1, E_2 \in F_2$ stets E_1 und E_2 orthogonal sind; ferner zwei Familien F_1, F_2 separabel, wenn es zwei elementenfremde Mengen M_1, M_2 gibt, so daß für $E_1 \in F_1$ und $E_2 \in F_2$ die Mengen $E_1 - M_1$ und $E_2 - M_2$ stets endlich oder leer sind. Es gilt der Satz: Zwei orthogonale Familien von höchstens abzählbar vielen Mengen sind stets separabel; für Familien von höherer Mächtigkeit bleibt der Satz nicht richtig.

Kamke (Tübingen).

Sierpiński, Waclaw: Sur l'équivalence des ensembles par décomposition en deux parties. *Fundam. Math.*, Warszawa **35**, 151—158 (1948).

Zwei Mengen A, B eines Euklidischen (oder allgemeiner eines metrischen) Raumes heißen zerlegungsgleich von n -ter Ordnung, in Zeichen $A \stackrel{n}{=} B$, wenn A und B als Summen $A = A_1 + \dots + A_n$, $B = B_1 + \dots + B_n$ mit $A_p A_q = B_p B_q = 0$ für $p \neq q$ so darstellbar sind, daß $A_v \cong B_v$ für $v = 1, \dots, n$ ist. Dieser Begriff hat Eigenschaften, die von denen des normalen Gleichheitsbegriffs abweichen. Verf. gibt dafür eine Reihe von Beispielen. Es ist $A \stackrel{2}{=} B$ in folgenden Fällen: (1) A die Menge der Punkte einer Geraden, B dieselbe Menge nach Fortlassen einer beschränkten oder abzählbaren Menge. (2) A die Menge aller reellen und B die Menge aller irrationalen oder transzendenten Zahlen. (3) A die Menge aller irrationalen und B die Menge aller transzendenten Zahlen. (4) A und B die Menge aller rationalen Zahlen $< a$ bzw. $< b$. (5) A die Oberfläche einer Kugel, B dieselbe Menge nach Fortlassen einer höchstens abzählbaren Menge. — Dagegen sind A und B in folgenden Fällen von keiner endlichen Ordnung zerlegungsgleich: (a) A die Menge aller rationalen und B die Menge aller reellen Zahlen oder aller endlichen Dezimalbrüche. — (b) A die Menge aller endlichen Dezimalbrüche und B die Menge aller endlichen dyadischen Brüche. — Aus (5) werden Folgerungen für Hausdorffs Zerlegung der Kugeloberfläche gezogen. *Kamke* (Tübingen).

Sierpiński, Waclaw: Sur un paradoxe de M. J. von Neumann. *Fundam. Math.*, Warszawa **35**, 203—207 (1948).

Es seien A, B zwei Mengen eines metrischen Raumes, in dem $\varrho(p, q)$ den Abstand zweier Punkte p, q bezeichnet. B heißt kleiner (N = im Sinne von J. v. Neumann) als A , wenn es für die Elemente a von A eine Abbildungsfunktion $f(a)$ gibt, durch die A eineindeutig auf B abgebildet wird und für die $\varrho(f(p), f(q)) < \varrho(p, q)$ für $p, q \in A$, $p \neq q$ gilt. — B heißt zerlegungskleiner (N) als A , wenn A und B so in elementenfremde Mengen

$$A = A_1 + \dots + A_n, \quad B = B_1 + \dots + B_n$$

zerlegt werden können, daß jedes B_v kleiner (N) als A_v ist. — Auf Grund eines Satzes von Banach und Tarski [*Fundam. Math.*, Warszawa **6**, 244—277 (1924)] beweist Verf., daß jeder Kreis $x^2 + y^2 \leq r_1^2$ zerlegungskleiner (N) als jeder Kreis $x^2 + y^2 \leq r_2^2$ ist. Vgl. hierzu auch Hadwiger, *Abh. math. Sem. Univ. Hamburg* **16**, 48—53 (1949).

Kamke (Tübingen).

Sierpiński, Waclaw: Exemple effectif d'une famille de 2^{\aleph_1} ensembles linéaires croissants. *Fundam. Math.*, Warszawa **35**, 213—216 (1948).

Es wird ein Beispiel der im Titel genannten Art konstruiert und daraus das vom Verf. früher auf anderem Wege hergeleitete Ergebnis gefolgert: Wenn $2^{\aleph_0} = \aleph_1$ ist, ist die Menge aller reellen Zahlen als Summe von $2^{2^{\aleph_0}}$ wachsenden Mengen darstellbar.

Kamke (Tübingen).

Maraham, Dorothy: Set functions and Souslin's hypothesis. *Bull. Amer. math. Soc.* **54**, 587—590 (1948).

Es sei E eine Boolesche Algebra. Ein System S von Elementen aus E heiße ein Souslinsches System, wenn gilt: 1. das leere Element (Nullelement) 0 von E ist nicht Element von S und für $s \in S$, $s' \in S$ gilt $s \cap s' = 0$ oder $s \leq s'$ oder $s' \leq s$; 2. Wenn $A \subseteq S$ aus paarweise fremden Elementen besteht, so ist A (höchstens) abzählbar; 3. wenn $A \subseteq S$ aus paarweise nicht fremden Elementen besteht, so ist A abzählbar. Souslins Vermutung ist äquivalent mit der Vermutung, daß jedes Souslinsche System abzählbar ist. Verf. beweist, daß Souslins Vermutung dann und nur dann richtig ist, wenn auf jeder nicht atomaren, der abzählbaren Kettenbedingung genügenden Booleschen Algebra E eine reell-wertige Funktion f existiert derart, daß gilt: 1. $x \leq y \rightarrow f(x) \leq f(y)$; 2. $f(x) = 0 \leftrightarrow x = 0$; 3. zu jedem $x \in E - (0)$ und $\varepsilon > 0$ existiert ein $y \in E - (0)$ mit $y < x$ und $f(y) < \varepsilon$.

Nöbeling (Erlangen).

Theodoresco, N.: L'application des ensembles et les conditions de biunivocité ponctuelle. Bull. math. Soc. Roumaine Sci. 48, 129—141 (1947).

Verf. beschäftigt sich mit der Abbildung zweier Mengen M_1 und M_2 aufeinander, die folgende Eigenschaften hat: 1. Jeder Untermenge $A_1 \subset M_1$ ist genau eine Untermenge $A_2 \subset M_2$ zugeordnet. 2. Jede Menge $A_2 \subset M_2$ ist Bild von genau einer Menge $A_1 \subset M_1$. 3. Das Bild der Summe $A_1 + B_1$ zweier Untermengen von M_1 ist die Summe $A_2 + B_2$ der Bilder von A_1 und B_1 . Hieraus werden einige weitere einfache Eigenschaften der Abbildung hergeleitet, und es wird gezeigt, daß die obigen Eigenschaften auch dann voneinander unabhängig sind, wenn sie noch weiter aufgespalten werden. Kamke (Tübingen).

Differentiation und Integration reeller Funktionen:

Morse, Anthony P.: Perfect blankets. Trans. Amer. math. Soc. 61, 418—442 (1947).

Verf. bedient sich folgender Begriffe: In einem metrischen Raum S liegt eine Bedeckung („blanket“) F vor, wenn jedem Punkt x einer gewissen Teilmenge A_F von S eine Familie $F(x)$ von Teilmengen β von S zugeordnet ist, derart, daß das Infimum der Durchmesser aller Mengen $\beta \in F(x)$, wenn β die Familie $F(x)$ durchläuft, Null ist: $\inf d(\beta \in F(x)) = 0$. F heißt Borelsch, wenn jedes β Borelsche Menge des Raumes S ist. Bedeutet Φ eine Maßfunktion im Sinne von Carathéodory [Vorlesungen über reelle Funktionen, Leipzig 1927, S. 238], welche zudem für beschränkte Mengen endliche Werte haben möge, so heißt F Φ -schwer, wenn F Borelsch ist und das System] aller $\beta, \beta \in F(x), x \in A_F$, ein abzählbares Teilsystem enthält, welches A_F bis auf eine Φ -Nullmenge überdeckt. Die Bedeckung G heißt ein Teil der Bedeckung F , wenn 1. $A_G \subset A_F$, 2. $G(x) \subset F(x)$ für $x \in A_G$. F heißt Φ -stark, wenn jeder Teil von F Φ -schwer ist. F heißt vollkommen („perfect“), wenn F Φ -stark ist für jede Maßfunktion Φ obiger Art. Wie Verf. in einer früheren Arbeit [A theory of covering and differentiation, Trans. Amer. math. Soc. 55, 205—235 (1944)] gezeigt hat, gibt es in einem separablen Raume vollkommene Bedeckungen. Mit besonderer Bezugnahme auf die Ergebnisse dieser Arbeit werden für die Deriviertenbildung bezüglich einer Φ -starken oder vollkommenen Bedeckung und für die Φ -Integration mehrere Sätze neu formuliert bzw. neu aufgestellt; für die betrachteten Mengenfunktionen $f(\beta)$ spielt dabei eine abgeschwächte Art von Oberadditivität (vom Verf. mit „addivulous“ bezeichnet) eine wichtige Rolle. — Für die Φ -Vitalieigenschaft eines Mengensystems in S wird eine hinreichende Bedingung bewiesen. In diesem Zusammenhange beweist Verf. einen interessanten allgemeinen Satz, der bei einfachster Formulierung so lautet: Sei M irgendeine Menge und $p > 0$. Jedem $x \in M$ sei eindeutig eine Menge B_x mit $x \in B_x \subset M$ und eine Zahl r_x mit $0 \leq r_x < p$ zugeordnet. Dann gibt es eine Teilmenge P von M mit folgenden Eigenschaften: 1. Wenn $x, y \in P$, $x \neq y$ und $x \in B_y$, dann ist $r_y \leq 2r_x$ und y nicht $\in B_x$; 2. $\Sigma B_x / x \in P = M$. — Der Hauptgegenstand der Arbeit ist der Nachweis des Satzes, daß in einem metrischen und linearen Raume S jede Sternbedeckung („star blanket“) vollkommen ist. Bei der Definition der Sternbedeckung wird der „Sternradius“ $\text{stra}(A, x)$ einer Menge A in einem Punkte x verwendet; dies ist der Radius der größten offenen Kugel um x , welche in der „Sternigkeitsmenge“ von A enthalten ist. F ist eine Sternbedeckung, wenn für jedes $x \in A_F$

$$\lim_{F(x) \ni \beta \rightarrow x} \sup \frac{d(\beta)}{\text{stra}(\beta, x)} < +\infty,$$

der Limes in dem vom Verf. in der schon erwähnten Arbeit eingeführten Sinne verstanden. Aumann (Regensburg).

Young, L. C.: Some applications of the Dirichlet integral to the theory of surfaces. Trans. Amer. math. Soc. **64**, 317—335 (1948).

Unter einer Fläche \mathfrak{F} (mit der Darstellung) $x = f(X)$ oder f verstehe man das eindeutige, stetige Bild $x = f(X)$ des Einheitsquadrates \mathfrak{R} der (kartesischen) $X = (u, v)$ -Ebene E_2 in den E_3 der x . Ist \mathfrak{Z} Teilmenge von \mathfrak{R} , so sei $\text{Osz}(f; \mathfrak{Z})$ die Länge des Durchmessers der Bildmenge von \mathfrak{Z} . — I. Es heiße \mathfrak{F} Dirichlet-fläche (N) [kurz: D-Fläche (N)], wenn \mathfrak{F} eine D-Darstellung (N) besitzt, d. h. eine Darstellung $x = f(X)$ derart, daß (1) $f(X)$ totalstetig ist auf fast allen u - und v -Parallelen, (2) das D-Integral $\iint_{\mathfrak{R}} 2^{-1}((f'_u)^2 + (f'_v)^2) dudv < N$. Es wird gezeigt:

Zu beliebigen $N > 0$, $\varepsilon > 0$ existiert ein $\eta = \eta(N, \varepsilon) > 0$ mit der Eigenschaft, daß zu beliebiger D-Fläche (N) bzw. D-Darstellung $x = f(X)$ ein $\delta > 0$ existiert mit $\eta < \delta < \varepsilon$ und von folgender Eigenschaft: \mathfrak{R} ist durch endlich viele Parallelen zur u - und v -Achse in Rechtecke einteilbar, deren Seitenlängen zwischen δ und 2δ liegen, derart, daß jede innerhalb \mathfrak{R} auf einer dieser Parallelen liegende Strecke von einer Länge kleiner als δ einen Bildbogen von kleinerer Länge als ε besitzt. II. Von der Folge $\{f_n\}$ wird vorausgesetzt: Zu beliebigem $\varepsilon > 0$ existiert $\delta > 0$, $n_0 > 0$ derart, daß aus $n \geq n_0$, $\text{Osz}(f_n; \mathfrak{W}') \geq \varepsilon$, $\text{Osz}(f_n; \mathfrak{W}'') \geq \varepsilon$ folgt $\text{Osz}(f_n; \mathfrak{W}) \geq \delta$; dabei soll sein entweder (i) \mathfrak{W} ein Bogen in \mathfrak{R} , dessen Endpunkte auf der Peripherie \mathfrak{P} von \mathfrak{R} liegen, während \mathfrak{W}' , \mathfrak{W}'' die beiden Teilbogen von \mathfrak{P} sind, in die \mathfrak{P} durch die Endpunkte von \mathfrak{W} zerlegt wird; oder (ii) \mathfrak{W} eine einfache geschlossene Kurve in \mathfrak{R} und \mathfrak{W}' bzw. \mathfrak{W}'' das Innere oder äußere von \mathfrak{W} in \mathfrak{R} . — Man sagt ferner, es erfülle $\{f_n\}$ eine Dreipunktebedingung in $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{R}$, wenn zu jedem n drei verschiedene Punkte a_n, b_n, c_n in \mathfrak{M} existieren derart, daß der Abstand irgend zweier der a_n, b_n, c_n größer ist als ein festes $\delta > 0$, ferner, daß $\lim f_n(a_n)$, $\lim f_n(b_n)$ und $\lim f_n(c_n)$ existieren und verschieden sind. Es gilt: Es seien $x = f_n(X)$ D-Darstellungen (N), die einer Dreipunktebedingung genügen: dann sind die f_n gleichmäßig stetig [d. h. $|f_n(X) - f_n(Y)| < \varepsilon$, falls $\|X, Y\| < z(\varepsilon)$, wo $z(\varepsilon)$ unabhängig von n , X und Y] auf \mathfrak{P} bzw. auf \mathfrak{R} , wenn (i) bzw. (i) und (ii) erfüllt sind. — III. Man sagt, die Fläche $x = f(X)$ besitze eine Spaltrandkurve (split boundary curve), wenn \mathfrak{P} Vereinigung zweier, die gleichen Endpunkte e', e'' besitzenden, sonst fremden Bogen $\mathfrak{W}', \mathfrak{W}''$ mit $\text{Osz}(f; \mathfrak{W}') > 0$, $\text{Osz}(f; \mathfrak{W}'') > 0$ ist und wenn e', e'' dem gleichen Konstanzkontinuum von f angehören. Man sagt ferner, die Folge $\{\mathfrak{F}_n\}$ von Flächen besitze asymptotisch eine Spaltrandkurve \mathfrak{C} , wenn eine Teilfolge $\{\mathfrak{G}_n\}$ existiert, so daß die Randkurven \mathfrak{C}_n der \mathfrak{G}_n (im Sinne von Fréchet) gegen \mathfrak{C} konvergieren in folgender Art: Durch einen Doppelpunkt von \mathfrak{C} wird \mathfrak{C} in zwei (geschlossene, mehrpunktige) Kurven $\mathfrak{C}', \mathfrak{C}''$ geteilt, die (Frchetsche) Limiten von Kurven $\mathfrak{C}'_n, \mathfrak{C}''_n$ auf \mathfrak{G}_n sind so, daß $\mathfrak{C}'_n = \mathfrak{B}'_n \pm \mathfrak{R}_n$, $\mathfrak{C}''_n = \mathfrak{B}''_n \pm \mathfrak{R}_n$, wobei $\mathfrak{B}'_n, \mathfrak{B}''_n$ komplementär auf \mathfrak{G}_n und wobei der Durchmesser von \mathfrak{R}_n gegen Null geht. Eine Fläche $f(X)$ besitzt einen (echten) geschlossenen Teil, wenn ein Teilgebiet \mathfrak{D} von \mathfrak{R} existiert, so daß $f(X)$ auf der Begrenzung von \mathfrak{D} konstant und daß $\text{Osz}(f; \mathfrak{D}) > 0$, $\text{Osz}(f; \mathfrak{R} - \mathfrak{D}) > 0$. Verf. beweist (in Erweiterung von Sätzen von McShane und Morrey): Eine Folge von Flächen, deren Randkurven (im Sinne von Fréchet) konvergieren, genügt der Bedingung (II) (i), wenn und nur wenn sie nicht asymptotisch eine Spaltrandkurve besitzt. Eine Folge von Flächen, die (im Sinne von Fréchet) gegen eine Fläche \mathfrak{F} konvergiert, genügt der Bedingung (II) (i) und (oder) (ii), wenn und nur wenn \mathfrak{F} keine Spaltrandkurve und (oder) keinen geschlossenen Teil besitzt. — IV. Verf. bespricht sodann Folgerungen aus einem Satz von Morrey (der sich auf D-Flächen bezieht), ferner gibt er einige Lemmata über harmonische Interpolation, die u. a. an eine frühere Arbeit des Verf. [dies. Zbl. **31**, 292] anknüpfen. — V. Die Fläche $x = f(X)$ heiße stückweise harmonisch in $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{R}$, wenn eine offene Menge $\mathfrak{D} \subset \mathfrak{M}$ existiert derart, daß f in jeder Komponente von \mathfrak{D} harmonisch ist, während das Bild von $(\mathfrak{M} - \mathfrak{D})$ auf endlich

vielen rektifizierbaren Kurven liegt. Es wird gezeigt: Es seien $x = f(X)$ D-Darstellungen (N) von abzählbar vielen Flächen mit endlichem (intrinsic, vgl. dies. Zbl. 31, 292] Flächeninhalt $A(f)$ und es seien die $f(x)$ gleichmäßig stetig auf der Peripherie \mathfrak{P} von \mathfrak{R} . Zu beliebigem $\varepsilon > 0$ existiert dann zu jedem $f(X)$ ein $\bar{f}(X)$ von folgender Art: Die \bar{f} sind gleichmäßig stetig in \mathfrak{R} ; es ist $f - \bar{f} \neq 0$ nur in je einer offenen Menge \mathfrak{D} ; in den Komponenten von \mathfrak{D} ist \bar{f} stückweise harmonisch, der Gesamtflächeninhalt dieser stückweise harmonischen Teile von \bar{f} ist kleiner als $\varepsilon A(f)$, und die Ränder dieser Teile liegen auf endlich vielen rektifizierbaren Kurven; schließlich ist $\bar{f}(X)$ selbst eine D-Darstellung (N) mit $A(\bar{f}) < (1 + \varepsilon)A(f)$. VI. Ein System von Flächen $x = f(X)$ heiße quasikompakt, wenn das System bei beliebig gegebenem $\varepsilon > 0$ in ein kompaktes System übergeführt werden kann durch folgenden Prozeß: Auf jeder Fläche f werden je gewisse Teilflächenstücke, die offenen Teilgebieten von \mathfrak{R} entsprechen, durch andere Flächenstücke ersetzt, deren Gesamtinhalt (für jedes f) kleiner ist als ε . Gezeigt wird unter anderem: Eine Folge von D-Flächen mit beschränkten Lebesgue-Frechet-Inhalten, deren Randkurven nicht Spaltrandkurven sind, gegen eine geschlossene Kurve konvergieren, aber nicht asymptotisch eine Spaltrandkurve besitzen, ist quasikompakt. — Wegen weiterer Einzelheiten muß auf die Arbeit selbst verwiesen werden. *Haupt* (Erlangen).

Sargent, W. L. C.: On fractional integrals of a function integrable in the Cesàro-Perron sense. Proc. London math. Soc., II. s. 51, 46—80 (1949).

Ist die reelle Funktion $f(x)$ der reellen Veränderlichen x im Intervall (a, b) integrierbar (in einer gewissen, nicht näher anzugebenden Ordnung) im Sinne von Cesàro-Perron [vgl. J. C. Burkill, Proc. London math. Soc., II. s. 39, 541—552 (1935); dies. Zbl. 12, 204], so schreibe man $f(x) \in CP$. Es wird gezeigt: I. Vor. $f(x) \in CP$ in (a, b) . Beh. $(t - x)^{\alpha-1} f(x) \in CP$ in (a, t) und zwar: Falls $\alpha > 0$, für fast alle t in (a, b) ; hingegen falls $\alpha \geq 1$, für alle t in (a, b) . — II. Vor. $\alpha + \beta > \alpha > 0$, ferner $f(x) \in CP$ und $(b - x)^{\alpha+\beta-1} f(x) \in CP$ in (a, b) . Beh. $(b - x)^{\beta-1} F_{\alpha}(x) \in CP$ und $F_{\alpha+\beta}(b) = (\Gamma(\beta))^{-1} \int_a^b (b - x)^{\beta-1} F_{\alpha}(x) dx$, wobei

$F_{\alpha}(x) = (\Gamma(\alpha))^{-1} \int_a^x (x - t)^{\alpha-1} f(t) dt$ (Die Integrale als CP -Integrale verstanden). —

III. Vor. $0 \leq \alpha < \alpha'$, $p > -1$ und $f(x) \sim l(x - a)^p(C, \alpha)$ für $x \rightarrow a + 0$. Beh. $f(x) \sim l(x - a)^p(C, \alpha')$ für $x \rightarrow a + 0$. Dabei ist z. B. die Beziehung $f(x + h) \sim lh^p(C, \alpha)$ für $h \rightarrow 0$ so zu verstehen:

$$\int_x^{x+h} |x + h - t|^{\alpha-1} f(t) dt / \int_x^{x+h} |x + h - t|^{\alpha-1} dt \sim lh^p \Gamma(p+1) \Gamma(\alpha+1) / \Gamma(\alpha+p+1).$$

IV. Aus $\alpha \geq 0$, $p > -1$ und $f(x) \sim l(x - a)^p(C, \alpha)$ für $x \rightarrow a + 0$ folgt $F_1(x) \sim l(x - a)^{p+1}/(p+1)(C, \beta)$ für $x \rightarrow a + 0$, wobei $\beta = \max(\alpha - 1, 0)$. Umgekehrt folgt aus $f(x) \in CP$ in (a, b) und $F_1(x) \sim l(x - a)^{p+1}/(p+1)(C, \alpha - 1)$ für $x \rightarrow a + 0$, sowie $\alpha \geq 1$, daß $f(x) \sim l(x - a)^p(C, \alpha)$ für $x \rightarrow a + 0$. — V. Wenn $0 < \alpha < 1$, $a < b < c$ und $f(x) \in CP$ in (a, b) , dann

$$\left| \int_a^b (c - x)^{\alpha-1} f(x) dx \right| \leq \text{ess. bound}_{a < t < b} \left| \int_a^t (t - x)^{\alpha-1} f(x) dx \right|.$$

Haupt (Erlangen).

Bowman, F.: Note on the integral $\int_0^{\frac{1}{2}\pi} (\log \sin \theta)^n d\theta$. J. London math. Soc. 22, 172—173 (1947).

Verf. zeigt, daß $\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \left[\log \left(\frac{2 \sin \vartheta}{a} \right) \right]^n d\vartheta$ gleich ist

$$(-1)^n \frac{\pi}{2} \begin{vmatrix} \log a & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \sigma_2 & \log a & -2 & 0 & \dots & 0 \\ \sigma_3 & \sigma_2 & \log a & -3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sigma_n & \sigma_{n-1} & \sigma_{n-2} & \dots & \dots & \log a \end{vmatrix} \quad \text{mit} \quad \sigma_r = \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^{s-1} s^{-r}.$$

Daraus folgt für $a = 2$, daß $\int_0^{\frac{1}{2}\pi} (\log \sin \vartheta)^n d\vartheta$ sich als Polynom in $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \dots$ ausdrücken läßt. Oberhettinger (Pasadena).

Spezielle Orthogonalfunktionen:

Hahn, Wolfgang: Über Orthogonalpolynome, die q -Differenzengleichungen genügen. Math. Nachr., Berlin 2, 4—34 (1949).

Se $\{M_n\}$ è una successione numerica, e $D_{0,n}$ indica la determinante di Hankel di ordine n :

$$D_{0,n} = \begin{vmatrix} M_0 & M_1 & \dots & M_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ M_{n-1} & M_n & \dots & M_{2n-2} \end{vmatrix}$$

supposto che la successione $\{D_{0,n}\}$ sia a termini non nulli, ai polinomi:

$$p_n(x) = \frac{1}{D_{0,n}} \begin{vmatrix} M_0 & M_1 & \dots & M_{n-1} & M_n \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ M_{2n-1} & M_n & \dots & M_{2n-2} & M_{2n-1} \\ 1 & x & \dots & x^{n-1} & x^n \end{vmatrix}$$

i quali soddisfano una relazione ricorrente:

$$(I) \quad p_n(x) = (x + \alpha_n) p_{n-1}(x) + \beta_n p_{n-2}(x) \quad [\alpha_n, \beta_n \text{ costanti}]$$

nell'ipotesi $D_{0,n} > 0$, corrisponde almeno un intervallo reale (a, b) e una funzione reale $\psi(x)$ non decrescente in (a, b) , tali che:

$$\int_a^b p_n(x) p_m(x) dx = 0 \quad \text{per } n \neq m; \quad \int_a^b p_n(x) d\psi(x) = \int_a^b x^n d\psi(x) = M_n,$$

essendo gli integrali presi nel senso di Stieltjes. — La successione $\{p_n(x)\}$ può definirsi assegnato (a, b) e la funzione $\psi(x)$, o inversamente la successione dei momenti $\{M_n\}$ (problema dei momenti), o come fa l'A. nella sua memoria, prescrivendo per essa condizioni particolari. — Essendo q ed ω due numeri qualunque, $|q| \neq 1$, si ponga per ogni intero n , $[n] = (q^n - 1)/(q - 1)$, e indichi $Lf(x)$ l'operatore lineare

$$Lf(x) = [f(qx + \omega) - f(x)]/[q - 1], \quad [q \text{ differenza}].$$

Chiamando ortogonale una successione di polinomi $\{p_n(x)\}$ per i quali vale una relazione ricorrente come la (I), l'A. dimostra che le cinque condizioni: (A) Se $\{p_n(x)\}$ è una successione ortogonale, anche $\{Lp_n(x)\}$ è una successione ortogonale, (B) i polinomi $y = p_n(x)$ soddisfano l'equazione alle q differenze

$$(a_{1,1}x^2 + a_{1,2}x + a_{1,3})L^2y + (a_{2,1}x + a_{2,2})Ly + a_{3,3}y = 0 \quad [L^2y = L(Ly)],$$

(C) per i polinomi $p_n(x)$ vale una rappresentazione

$$p_n(x) = [\pi(x)]^{-1} L^n [f_0(x) f_1(x) \dots f_n(x) \pi(x)], \quad f_i(x) = f_{i+1}(qx + \omega)$$

con $\pi(x)$ e $f_0(x)$ indipendenti da n ; (D) posto $p_n(x) = \sum_{i=0}^n a_{n,i} x^i$, i coefficienti $a_{n,i}$ soddisfano una relazione ricorrente

$$g_1([n], [i]) a_{n,i} = g_2([n], [i]) a_{n,i-1}$$

con $g_1(x, y), g_2(x, y)$ funzioni razionali intere nei due argomenti (x, y) ; (E) alla successione $\{p_n(x)\}$ può associarsi una successione di momenti $\{M_n\}$ i quali soddisfano una relazione ricorrente

$$M_n = [(a + bq^n)/(c + dq^n)] M_{n-1} \quad (a, b, c, d \text{ costanti, } ad - bc \neq 0);$$

permettono di costruire classi di polinomi che le soddisfano simultaneamente. —

Se i simboli ${}_2\varphi_1(q^\alpha, q^\beta; q^\gamma; x), {}_1\varphi_1(q^\alpha; q^\beta; x), \dots$ indicano le serie di Heine

$${}_2\varphi_1(q^\alpha, q^\beta; q^\gamma; x) = 1 + \frac{[\alpha][\beta]}{[\gamma][1]} x + \frac{[\alpha][\alpha+1][\beta][\beta+1]}{[\gamma][\gamma+1][1][2]} x^2 + \dots,$$

$${}_1\varphi_1(q^\alpha; q^\beta; x) = 1 + \frac{[\alpha]}{[\beta][1]} x + \frac{[\alpha][\alpha+1]}{[\beta][\beta+1][1][2]} x^2 + \dots,$$

serie che per $\alpha = -n$ si riducono a polinomi di grado n , l'A. dimostra che il problema dei momenti relativo alla corrispondente successione $\{M_n\}$ è risolubile per le seguenti classi di polinomi:

${}_3\varphi_2(q^{-n}, q^{e+n}, x; q^\sigma, q^\tau; q), {}_2\varphi_1(q^{-n}, q_i^{e+n}; q^\sigma; x), {}_2\varphi_1(q^{-n}, x; q^e; q^{\sigma+n}), {}_1\varphi_1(q^{-n}; q^e; q^n x)$, e per altre tre classi deducibili anch'esse dalle serie di Heine. Osserva poi come i classici polinomi di Jacobi, di Tehebychef-Laguerre, di Tehebychef-Hermite, o connessi a certi schemi di distribuzione discreta di probabilità, possano ottenersi dai suoi polinomi quando $q \rightarrow 1$ e l'operatore L simboleggi l'ordinaria derivazione.

Giovanni Sansone (Firenze).

Truesdell, C.: On the functional equation $\partial F(z, \alpha)/\partial z = F(z, \alpha + 1)$. Proc. nat. Acad. Sci. USA **33**, 82—93 (1947).

Verf. gibt die Zusammenstellung einer Reihe von allgemeinen Theorien für Funktionen, die der Funktionalgleichung $\partial F(z, \alpha)/\partial z = F(z, \alpha + 1)$ genügen. Als konkretes Beispiel derartiger Funktionen wird eine Liste von 12 speziellen Ausdrücken gegeben, die resp. Zylinder-, Laguerre-, konfluente hypergeometrische, Hermitesche und Legendre-Funktionen enthalten. — Eine Fülle von teilweise bisher nicht bekannten Funktional- und Integralbeziehungen wird zwanglos und in einfacher Weise erhalten, durch Anwendung der eingangs erwähnten allgemeinen Theoreme auf die Liste der Beispiele.

Oberhettinger (Pasadena).

Burnnall, J. L. and T. W. Chaundy: The hypergeometric identities of Cayley, Orr, and Bailey. Proc. London math. Soc., II. s. **50**, 56—74 (1948).

Die Identität von Cayley besagt: Wenn man setzt:

$$(1 - x)^{a+b-c} F(2a; 2b; 2c; x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n x^n,$$

dann ist

$$F(a; b; c + \tfrac{1}{2}; x) F(c - a; c - b; c + \tfrac{1}{2}; x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(c)_n}{(c + \tfrac{1}{2})_n} A_n x^n.$$

Hier bedeutet F die hypergeometrische Reihe und $(a)_n$ ist 1 für $n = 0$ und $a(a+1)\dots(a+n-1)$ für $n \geq 1$. Dieses Resultat und verwandte Identitäten von Orr und Bailey [s. Trans. Cambridge philos. Soc. **17**, 1—15 (1899); Proc. London math. Soc., II. s. **38**, 377—384 (1934); dies. Zbl. **10**, 263] werden neu abgeleitet durch Untersuchung der Differentialgleichungen, denen die beiden Seiten der Identitäten genügen. Als Konsequenzen ergeben sich einige „Verdoppelungsformeln“ für F , und zwar entspricht der Cayleyschen Identität die Formel

$$F(2a; 2b; 2c; x) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-\tfrac{1}{2})_r (a)_r (b)_r (c-a)_r (c-b)_r}{r! (c + \tfrac{1}{2})_r (c+r-1)_r (c)_{2r}} x^{2r} \{F(a+r; b+r; c+2r; x)\}^2.$$

Umgekehrt läßt sich $\{F(a; b; c; x)\}^2$ ausdrücken als

$$\sum_{r=0}^{\infty} \frac{(\tfrac{1}{2})_r (a)_r (b)_r (c-a)_r (c-b)_r}{r! (c)_r (c)_{2r} (c+r-\tfrac{1}{2})_r} x^{2r} F(2a+2r; 2b+2r; 2c+4r; x).$$

Ferner wird eine Reihe von verwandten Resultaten (insbesondere ein Multiplikationstheorem) bewiesen.

W. Magnus (Pasadena).

Bailey, W. N.: A transformation of nearly-poised basic hypergeometric series. J. London math. Soc. **22**, 237—240 (1947).

In Analogie mit Heines Verallgemeinerung der hypergeometrischen Reihe definiert man

$${}_r\Phi_s \left[\begin{matrix} \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r \\ \varrho_1, \dots, \varrho_s \end{matrix} ; z \right] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha_1)_{a,n}, \dots, (\alpha_r)_{a,n}}{(q)_{a,n} (\varrho_1)_{a,n}, \dots, (\varrho_s)_{a,n}} z^n,$$

wobei $(a)_{a,n} = (1-a)(1-aq) \dots (1-aq^{n-1})$, $(a)_{a,0} = 1$ gesetzt ist. Der Index q wird fortgelassen, wenn er sich von selber versteht. Verf. beweist nun:

$$\begin{aligned} & {}_7\Phi_6 \left[\begin{matrix} a, q\sqrt{a}, -q\sqrt{a}, b, c, d, x^{-N} \\ \sqrt{a}, -\sqrt{a}, aq/b, aq/c, aq/d, a^2q^{2-N}/k^2 \end{matrix} ; q \right] \\ &= \frac{(k^2/a)_{N-1} (k/aq)_N (1-k^2q^{2N-1}/a)}{(kq)_N (k^2/a^2q)_N} \cdot {}_{12}\Phi_{11} \left[\begin{matrix} k, q\sqrt{k}, -q\sqrt{k}, kb/a, kc/a, kd/a, \sqrt{ax}, \\ \sqrt{k}, -\sqrt{k}, aq/b, aq/c, aq/d, k\sqrt{q/a}, \\ -\sqrt{ax}, q\sqrt{a}, -q\sqrt{a}, k^2q^{N-1}/a, q^{-N} \\ -k\sqrt{q/a}, k/\sqrt{a}, -k/\sqrt{a}, aq^{2-N}/k, kq^{N+1} \end{matrix} ; q \right], \end{aligned}$$

wobei $k = a^2q/bcd$. Dies ist eines der wenigen noch ausstehenden Analoga zu der Theorie der gewöhnlichen verallgemeinerten hypergeometrischen Reihen.

W. Magnus (Pasadena).

Bailey, W. N.: Identities of the Rogers-Ramanujan type. Proc. London math. Soc., II. s. **50**, 1—10 (1948).

Mit dem Hilfssatz: Wenn $\beta_n = \sum_{r=0}^n \alpha_r u_{n-r} v_{n+r}$, $\gamma_n = \sum_{r=n}^{\infty} \delta_r u_{r-n} v_{r+n}$, dann ist

$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \gamma_n = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n \delta_n$, und mit den Beziehungen

$$\begin{aligned} (a)_n &= (1-a)(1-ax)(1-ax^2) \dots (1-ax^{n-1}), \\ x_n &= 1-x^n, \quad \bar{x}_n = 1+x^n, \quad x_n! = (x)_n, \quad x_n!! = x_1 x_3 \dots x_{2n-1}, \\ x_n^r &= x_{rn}, \quad x_n^r! = x_1^r x_2^r \dots x_n^r; \quad x_n^r!! = x_1^r x_3^r \dots x_{2n-1}^r, \\ [a]_n &= (1-a)(1-ax^2) \dots (1-ax^{2n-2}), \quad \{a\}_n = (1-a)(1-ax^3) \dots (1-ax^{3n-3}) \end{aligned}$$

werden eine Reihe von Identitäten bewiesen, welche als Spezialfälle frühere Resultate von Verf. [Proc. London math. Soc., II. s. **49**, 421—435 (1947)], F. H. Jackson [Mess. Math. **57**, 169—187 (1928)] und L. J. Rogers [Proc. London math. Soc. **25**, 318—343 (1894); **26**, 15—32 (1895); II. s. **16**, 315—336 (1917)] enthalten. Einige der einfacheren und bisher unbekannten Ergebnisse sind die Formeln:

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[-ax]_n}{x_n! (-ax)_{2n}} a^n x^{n^2} \\ &= \prod_{m=1}^{\infty} \left[\frac{1+a^2x^{2m}}{1-a^2x^{2m-1}} \right] \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (ax)_{n-1}}{x_n!} (1-ax^{2n}) a^{2n} x^{(5n^2-n)/2} \right], \\ & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\{ax^3\}_n}{x_n! (ax)_{2n+1}} a^n x^{n^2+n} \\ &= \prod_{m=1}^{\infty} \left(\frac{1}{1-ax^m} \right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \{ax^3\}}{x_n^3!} a^{4n} x^{(27n^2+9n)/2} (1-a^3x^{18n+9}). \end{aligned}$$

W. Magnus (Pasadena).

Erdélyi, A.: Lamé-Wangerin functions. J. London math. Soc. **23**, 64—69 (1948).

Die Lamésche Differentialgleichung

$$\frac{d^2 \Lambda(x)}{dx^2} + \{h - n(n+1)k^2 \operatorname{sn}^2 x\} \Lambda(x) = 0 \quad (n \geq -\frac{1}{2}; 0 < k < 1)$$

tritt nach A. Wangerin auch bei der Separation von $\Delta u = 0$ in einem Koordi-

natensystem konfokaler Drehzykliden auf. Hier interessieren solche Lösungen, für die $|\operatorname{sn} x|^{\frac{1}{2}} A(x)$ im Intervall $x = iK't$, $-1 \leq t \leq 1$ stetig ist. Für diese „Lamé-Wangerin-Funktionen“ werden Reihenentwicklungen und für die entsprechenden Eigenwerte von h eine transzendente Gleichung in Kettenbruchform angegeben.

F. W. Schäfke (Berlin).

Funktionentheorie:

Morse, Marston and Maurice Heins: *Topological methods in the theory of functions of a complex variable.* Bull. Amer. math. Soc. **53**, 1—14 (1947).

Gewisse Aussagen der klassischen Funktionentheorie, wie z. B. die Integralformeln für die Anzahlen von Null- und Unendlichkeitsstellen, lassen sich durch Einführung topologischer Begriffe von unnötigen Einschränkungen (Regularität der Funktionen am Rande, Rektifizierbarkeit der Randkurven) befreien und werden in der modifizierten Gestalt zweckmäßig für eine erweiterte Funktionenklasse bewiesen, die aus der Klasse der analytischen Funktion dadurch hervorgeht, daß man den Variabilitätsbereich der unabhängigen Veränderlichen einer topologischen Abbildung unterwirft und die Funktionswerte überpflanzt. An die Stelle der meromorphen Funktionen treten dann innere Transformationen (interior transformations), deren Realteile pseudoharmonische Funktionen heißen. Die Begriffe Pol, logarithmische Singularität, kritischer Punkt (Sattelpunkt) lassen sich auf diese verallgemeinerten Funktionen übertragen. Verff. berichten über einige neuere Ergebnisse. Sie teilen eine Formel mit, die für eine in einem ν -fach zusammenhängenden, von Jordankurven berandeten Bereiche bis auf logarithmische Singularitäten reguläre pseudoharmonische Funktion einen Zusammenhang zwischen der Zahl der logarithmischen Singularitäten, der Sattelpunkte und der relativen Minima herstellt, wobei die stetigen Randwerte so zu wählen sind, daß nur endlich viele relative Extrema auftreten und die Zählung der Sattelpunkte und Randsattelpunkte nach ihrer Vielfachheit noch erläutert werden muß. Eine ähnliche Formel verknüpft bei inneren Transformationen die Zahl der Stellen, an denen ein Wert a angenommen wird, die Zahl der Randlinien, die Umlaufscharakteristiken der Randlinienbilder in bezug auf a , die Zahl der Punkte, die im Bilde zu Windungspunkten führen — ein Phänomen, das mutatis mutandis auch am Rande eintreten kann —, und schließlich die Winkelcharakteristiken der Randbilder. Vorausgesetzt wird dabei topologisch transformierter meromorpher Charakter in einem von ν Jordankurven begrenzten Bereiche; außerdem sollen die Ränder stetig auf Kurven abgebildet werden, die nicht durch a gehen und im kleinen schlicht sind. Was die Winkelcharakteristik (angular order) einer orientierten, geschlossenen, im kleinen schlichten Kurve betrifft, so ist sie bei Vorhandensein einer stetigen Tangente gleich der durch 2π dividierten Winkeländerung, die die Tangentenrichtung bei Durchlaufung der Kurve erfährt; bei Kurven ohne stetige Tangente hat man entsprechend eine hinreichend kurze Sehne zu betrachten. — Schließlich wird ein Satz über Deformationsklassen meromorpher Funktionen oder innerer Transformationen mitgeteilt. Es sei zunächst $f(z)$ meromorph für $|z| < 1$ und habe die Nullstellen a_0, \dots, a_r und die Unendlichkeitsstellen a_{r+1}, \dots, a_n , sämtlich erster Ordnung, während b_1, \dots, b_μ in Verzweigungspunkte erster Ordnung übergehen sollen. Die a_i und b_k sollen festgehalten werden, während für veränderliches t , $0 \leq t \leq 1$, $F(z, t)$ eine stetig von t abhängige Folge meromorpher Funktionen mit diesen a_i und b_k durchlaufen soll; $F(z, 0) = f(z)$. Die durch solche Deformationen aus $f(z)$ erzeugbaren meromorphen Funktionen bilden eine Deformationsklasse, und es zeigt sich, daß es für $n > 1$ stets unendlich viele, durch ganzzahlige Invariantensysteme vollständig charakterisierbare Deformationsklassen zu festen a_i und b_k gibt. Das entsprechende gilt für innere Transformationen. — Dafür, daß nicht alle Sätze von meromorphen Funktionen auf

innere Transformationen übertragen werden können, wird zum Schluß ein Beispiel aus der Theorie der Funktionenfolgen angegeben. *Brödel* (Jena).

Carafa, M.: *Sul prolungamento analitico.* Atti Accad. naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. fisic. mat. natur., VIII. s. 5, 127—133 (1948).

Man kann nach Mittag-Leffler die Potenzreihenentwicklung $\mathfrak{P}(z - a)$ einer Funktion $f(z)$ elementar in eine nach Polynomen von z fortschreitende Reihe umrechnen, die im ganzen von a ausgehenden Regularitätsstern der Funktion konvergiert. Verf. benutzt diesen Sachverhalt, um die Cauchysche Integralformel so zu transformieren, daß bei Integration über eine im Regularitätsgebiet verlaufende und auf einen Punkt zusammenziehbare Kurve C der Verlauf von $f(z)$ nicht nur innerhalb C dargestellt wird, sondern sofort innerhalb des ganzen zu einem willkürlichen von C umschlossenen Punkte a gehörigen Regularitätssterns. *Brödel*.

Utz, W. R.: *On the decomposition of meromorphic functions.* Rev. Ci., Lima 59, 167—170 (1948).

En reprenant un problème de Loomis [Trans. Amer. math. Soc. 50, 1—14 (1941); ce Zbl. 25, 170], l'auteur donne des conditions nécessaires et suffisantes pour que $f(z)$, méromorphe dans un domaine simplement connexe R , dont la frontière $F(R)$ est localement connexe, se décompose sous la forme $f(z) = f_2[f_1(z)]$, f_2 étant une fraction rationnelle et $f_1(z)$ étant régulière et univalente dans R . Il faut et il suffit que tout le long de $F(R)$ la fonction $f(z)$ soit rationnellement-multivalente, donc, pour chaque $z_0 \in F(R)$ il existe une fraction rationnelle g telle que l'on ait $f(z) = g[h(z)]$, avec $h(z)$ méromorphe et univalente dans un demi-voisinage de z_0 (intersection de R avec un voisinage de z_0). On retrouve la condition donnée par Loomis lorsque R coïncide avec $|z| < 1$. *Calugareanu* (Cluj).

Shah, S. M.: *The maximum term of an entire series. III.* Quart. J. Math. (Oxford Ser.) 19, 220—223 (1948).

$f(z) = \sum a_n z^n$ étant une fonction entière d'ordre ρ ($0 < \rho < \infty$), on désigne par $\nu(r)$ le rang du terme de la série de module maximum sur $|z| = r$ et l'on pose

$$\varliminf_{r^{\rho}} \frac{\log M(r)}{r^{\rho}} = \begin{cases} T \\ t \end{cases}, \quad \varliminf_{r^{\rho}} \frac{\nu(r)}{r^{\rho}} = \begin{cases} \gamma \\ \delta \end{cases}.$$

L'Aut. établit que

$$\delta \leq \frac{\gamma}{e} e^{\delta/\gamma} \leq \rho T \leq \gamma, \quad \delta \leq \rho t \leq \delta \left(1 + \log \frac{\gamma}{\delta}\right) \leq \gamma.$$

Il montre sur des exemples la précision de ces inégalités.

Dufresnoy.

Broman, Arne: *Conformal mapping and convergence of a power series.* Proc. nat. Acad. Sci. USA 34, 605—610 (1948).

Eine Potenzreihe, die das Innere ihres Konvergenzkreises auf einen von einer Jordankurve begrenzten Bereich abbildet, konvergiert bekanntlich in jedem Randpunkte. Verf. stellt die Frage, ob es Potenzreihen gibt, die ihren Konvergenzkreis auf die universelle Überlagerungsfläche eines mehrfach zusammenhängenden Bereiches abbilden und in jedem Peripheriepunkte konvergieren. Er beweist, daß das höchstens dann eintreten kann, wenn es sich um die Überlagerung eines zweifach zusammenhängenden Bereiches mit einem punktförmigen und einem linienförmigen Rande handelt, und zeigt an einem Beispiele, daß der Fall durchgängiger, natürlich nicht gleichmäßiger Konvergenz am Rande tatsächlich vorkommt. *Brödel*.

Andreotti, Aldo: *Applicazione di un teorema di Schottky-Cecioni allo studio della geometria sopra una curva ellittica in relazione con quello sopra due curve ellittiche reali del tipo di Harnack.* Boll. Un. mat. Ital., III. s. 3, 210—214 (1948).

Wenn man eine algebraische Riemannsche Fläche vom Geschlechte eins längs eines nichtzerfallenden Rückkehrschnittes, der analytisch sein möge, aufschneidet, so entsteht ein zweifach zusammenhängender, schlichtartiger Bereich, den man nach dem Satze von Schottky bzw. der Verallgemeinerung von Cecioni [Ann. Univ. Toscane (1928)] umkehrbar eindeutig und konform auf eine Hälfte einer ortho-

symmetrischen Riemannschen Fläche vom Geschlechte eins abbilden kann. Verf. betrachtet auf der Ausgangsfläche zwei Rückkehrschnitte a und b , die bei der Abbildung durch das Integral erster Gattung geradlinig werden, und zwar soll a zu einer möglichst kleinen Periode führen, b aber mit a zusammen eine kanonische Aufschneidung bewirken und einen möglichst großen, nicht stumpfen Winkel mit a bilden. Die beiden zugehörigen Aufschneidungen führen zu zwei orthosymmetrischen Riemannschen Flächen; deren Periodenrechtecke weisen Seitenverhältnisse auf, die innerhalb eines explizit angebbaren Spielraums variieren. — Die im Titel genannten elliptischen Kurven vom Harnackschen Typ haben zwei Realitätszüge, gehören also zu orthosymmetrischen Riemannschen Flächen und können diese vertreten.

Brödel (Jena).

Lammell, Ernst: Über einen Weg zur Verallgemeinerung der Beziehungen zwischen Potential- und Funktionentheorie. Arch. Math., Oberwolfach 1, 113—118 (1948).

Man kann von der ebenen Potentialtheorie aus folgendermaßen zu einer Einführung der komplexen Zahlen gelangen. Man sucht homogene Polynome, die der Laplaceschen Gleichung genügen, stellt fest, daß es zu jedem Grade zwei linear unabhängige gibt, wählt passende Basisfunktionen u_n , v_n und findet zwischen Funktionen verschiedener Grade den Zusammenhang $u_{m+n} = u_m u_n - v_m v_n$, $v_{m+n} = v_m u_n + u_m v_n$. Dieser Zusammenhang gibt den Anlaß zu der bekannten Einführung der Multiplikation von komplexen Zahlen. Eine Übertragung auf den räumlichen Fall wird dadurch erschwert, daß man zunächst $2n + 1$ Basisfunktionen für den Grad n zu betrachten hat. Verf. gibt ohne nähere Erläuterung ein spezielles System an und gewinnt durch Summenbildung für jeden Grad vier Funktionen $t^{(n)}$, $u^{(n)}$, $v^{(n)}$, $w^{(n)}$ — für $n = 1$ reduzieren sie sich auf $x, y, 0, z$ —, die Relationen der folgenden Art genügen: $t^{(m+n)} = t^{(m)} t^{(n)} + u^{(m)} u^{(n)} - 2v^{(m)} v^{(n)} - 2w^{(m)} w^{(n)}$; die Formeln für $u^{(m+n)}$ usw. sind ähnlich gebaut. Jetzt werden Zahlenquadrupel (t, u, v, w) eingeführt und als hyperkomplexe Zahlen bezeichnet; Gleichheit und Addition werden wie üblich definiert, und das Multiplikationsgesetz wird nach Analogie des erwähnten Formelsystems eingeführt. Die Multiplikation erweist sich als kommutativ, assoziativ und bezüglich der Addition distributiv, die Division durch (t, u, v, w) ist möglich und eindeutig bestimmt, außer, wenn — ich korrigiere eine offenbare Ungenauigkeit — $t = u$, $v = w$ oder $t = -u$, $v = -w$ gilt. Die Punkte des Raumes werden sinngemäß durch die Quadrupel $(x, y, 0, z)$ erfaßt. Eine Funktion einer hyperkomplexen Zahl, deren Wert selbst eine hyperkomplexe Zahl ist, heißt differenzierbar, wenn sie sich im Infinitesimalen linear verhält. Die Komponenten einer differenzierbaren Funktion von $(x, y, 0, z)$ erweisen sich als harmonische Funktionen. — Es existiert ein Analogon für den Cauchyschen Integralsatz, aber nicht für die Integralformel.

Brödel (Jena).

Modulfunktionen:

Lehner, Joseph: Divisibility properties of the Fourier coefficients of the modular invariant $j(\tau)$. Amer. J. Math. 71, 136—148 (1949).

Die Fourierkoeffizienten der einwertigen absoluten Invariante der Modulgruppe

$$j(\tau) = t^{-1} + \sum_{m=0}^{\infty} c_m t^m \quad (t = e^{2\pi i \tau}, \Im \tau > 0)$$

genügen, wie Verf. zeigt, den Kongruenzen

$$c_{5\nu} \equiv 0 \pmod{25}, \quad c_{7\nu} \equiv 0 \pmod{7}, \quad c_{11\nu} \equiv 0 \pmod{11} \quad (\nu > 0 \text{ ganz});$$

darüber hinaus findet er allgemeiner

$$c_m \equiv 0 \pmod{5^{\alpha+1}}, \quad \text{wenn } m \equiv 0 \pmod{5^{\alpha}}; \quad c_m \equiv 0 \pmod{7^{\alpha}}, \quad \text{wenn } m \equiv 0 \pmod{7^{\alpha}};$$

$$c_m \equiv 0 \pmod{11^2}, \quad \text{wenn } m \equiv 0 \pmod{11^2} \quad (m, \alpha = 1, 2, \dots).$$

Die Beweise für diese und ähnliche Sätze haben durch die Verwendung gewisser Operatoren eine größere Durchsichtigkeit erlangt. Bezeichnet $f(\tau)$ eine in $\Im \tau > 0$ reguläre Modulfunktion zu einer Untergruppe Γ von endlichem Index in der vollen Modulgruppe $\Gamma(1)$ und hat überdies der Fundamentalebereich von Γ im Unendlichen die Breite 1, so führt der Operator $U_p f(\tau) = p^{-1} \sum_{k \bmod p} f\left(\frac{\tau+k}{p}\right)$ ($p = \text{Primzahl} > 3$) die Funktion

$$f(\tau) = \sum_{m=m_0}^{\infty} a_m t^m \quad \text{in} \quad f_p^*(\tau) = U_p f(\tau) = \sum_{m=m_0}^{\infty} a_{mp} t^m$$

über, wo $f_p^*(\tau)$ eine in $\Im \tau > 0$ reguläre Modulfunktion zu einer gewissen Untergruppe Γ_p^* von Γ ist; Γ_p^* genügt den oben für Γ formulierten Voraussetzungen. Für $\Gamma = \Gamma(1)$ ist $\Gamma_p^* = \Gamma_0(p)$ [definiert durch $L = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in \Gamma(1)$, $\gamma \equiv 0(p)$]; wenn das Geschlecht von $\Gamma_0(p)$ verschwindet, besteht daher die Möglichkeit, $U_p j(\tau)$ als Polynom in einer passend gewählten Hauptfunktion von $\Gamma_0(p)$ darzustellen. Eine solche Hauptfunktion ist in den Fällen $p = 5, 7, 13$: $\Phi_{pr}(\tau) = \left(\frac{\eta(p\tau)}{\eta(\tau)}\right)^r$ [$r(p-1) = 24$]. Zur Konstruktion des genannten Polynoms kommt es, weil $U_p j(\tau)$ im Unendlichen regulär ist, darauf an, den Pol abzubauen, den $U_p j(\tau)$ in der Spitze 0 von $\Gamma_0(p)$ hat. Dazu dient die Transformationsgleichung

$$\Phi_{pr}(\tau) = p^{-r/2} \Phi_{pr}\left(\frac{-1}{p\tau}\right)^{-1};$$

sie zeigt, daß die Entwicklung von $\Phi_{pr}(\tau)$ nach der Ortsvariablen $t' = \exp\left(2\pi i \frac{-1}{p\tau}\right)$ der Spitze 0 mit $p^{-r/2} t'^{-1}$ beginnt, daß also zum Abbau des Poles $t' = 0$ die Potenzen von $p^{r/2} \Phi_{pr}(\tau)$ linear zu kombinieren sind; die Polglieder in der Entwicklung von $U_p j(\tau)$ nach Potenzen von t' enthalten demgegenüber höchstens den Nenner p . So entsteht eine Identität

$$U_p j(\tau) = \sum_{m=0}^{\infty} c_{mp} t^m = C_0 + p^{r/2-1} \sum_{v=1}^K C_v p^{r/2(v-1)} \Phi_{pr}(\tau)^v \quad (K = p^2, C_v \text{ ganz}),$$

die durch Koeffizientenvergleich unmittelbar die Kongruenzen mod 25 und 7 liefert. Um die Kongruenzen mod $5^{\alpha+1}$ und 7^{α} ($\alpha > 1$) zu erhalten, hat man dieses Verfahren auf eine von Rademacher angegebene Weise zu iterieren. Die Diskussion bezüglich der Moduln 11 und 121 gestaltet sich komplizierter, da das Geschlecht von $\Gamma_0(11)$ gleich Eins ist. Hier muß $U_{11} j(\tau)$ als Polynom in zwei zweiwertigen Funktionen zu $\Gamma_0(11)$ dargestellt und diese Darstellung passend iteriert werden, was zunächst jedoch nur einmal möglich ist. Verf. bemerkt aber am Schluß, daß auch die analoge Kongruenz mod 1331 zutrifft. Petersson (Hamburg).

Gewöhnliche Differentialgleichungen. Differenzengleichungen:

Szarski, J.: Sur un système d'inégalités différentielles. Ann. Soc. Polonaise Math. 20, 126—134 (1948).

Die rechten Seiten des Differentialgleichungssystems

$$(1) \quad y'_v(x) = f_v(x, y_1, \dots, y_n) \quad (v = 1, \dots, n)$$

seien in einer offenen Menge Ω stetig, und es sei dort

$$f_v(x, y_1, \dots, y_{v-1}, y_v, y_{v+1}, \dots, y_n) \leq f_v(x, Y_1, \dots, Y_{v-1}, y_v, Y_{v+1}, \dots, Y_n)$$

für $y_{\kappa} \leq Y_{\kappa}$ ($\kappa = 1, \dots, v-1, v+1, \dots, n$). Im Intervall $x_0 \leq x < x_0 + a$ sei $y_v = \psi_v(x)$ ($v = 1, \dots, n$) ein rechtes oberes Integral des Systems (1) mit den Anfangswerten y_v^0 an der Stelle x_0 . Es seien schließlich $\varphi_v(x)$ ($v = 1, \dots, n$) in demselben Intervall $x_0 \leq x < x_0 + a$ im verallgemeinerten Sinne absolut stetig, $\varphi_v(x_0) \leq y_v^0$ und $\varphi'_v(x) \leq f_v(x, \varphi_1, \dots, \varphi_n)$ ($v = 1, \dots, n$), wo φ'_v die approximative Ableitung bezeichnet. Dann gilt $\varphi_v(x) \leq \psi_v(x)$ ($v = 1, \dots, n$) im ganzen

Intervall $x_0 \leq x < x_0 + a$. — Der Fortschritt gegenüber dem, was bisher bekannt war, liegt in den geringen Voraussetzungen über die Funktionen φ_v .

Kamke (Tübingen).

Wilkins jr., J. Ernest: The converse of a theorem of Tchaplygin on differential inequalities. Bull. Amer. math. Soc. **53**, 126—129 (1947).

Es wird bewiesen: I. $p_1(x)$, $p_2(x)$, $q(x)$ seien für $x \geq x_0$ stetige Funktionen. $y(x)$ genüge der Differentialgleichung $y'' - p_1 y' - p_2 y - q = 0$ ($x \geq x_0$), $v(x)$ der Differentialungleichung (1) $v'' - p_1 v' - p_2 v - q > 0$ ($x \geq x_0$) und den Anfangsbedingungen (2) $v(x_0) = y(x_0)$, $v'(x_0) = y'(x_0)$. Dann gilt $v(x) > y(x)$ ($x_0 < x \leq x_1$), falls es eine für $x_0 < x < x_1$ nicht verschwindende Lösung von (3) $u'' - p_1 u' - p_2 u = 0$ gibt. — II. $u_0(x)$ sei die Lösung von (3) mit $u_0(x_0) = 0$, $u'_0(x_0) = 1$. Verschwindet $u_0(x)$ rechts von x_0 zum ersten Maler an der Stelle $X(x_0)$, so gibt es zu jedem $k > 0$ eine (1), (2) genügende Funktion $v(x; k)$ mit $v(X(x_0) + k; k) < y(X(x_0) + k)$. — I. erweist sich, falls noch $p'_1(x)$ stetig ist, als gleichwertig einem Satze von S. Tchaplygin, der forderte, es solle eine für $x_0 < x < x_1$ stetige Lösung $\lambda(x)$ der Riccatischen Differentialgleichung $\lambda' + \lambda^2 + p_1 \lambda + (p'_1 - p_2) = 0$ geben. II. erweitert eine Aussage von V. N. Petrov [C. r. Acad. Sci. URSS **51**, 255—258 (1946)], der gezeigt hatte, daß für konstante p_1, p_2 das Resultat von Tchaplygin nicht verbessert werden kann.

F. W. Schäfke (Berlin).

Wintner, Aurel: Successive approximations and a property of the exponential series. Mat. Tidsskr. A, København **1948**, 22—24 (1948).

Die Funktion $f(t)$ sei negativ und stetig für $0 \leq t < \infty$. Dann gibt es nach A. Kneser [J. reine angew. Math. **116**, 183—191 (1896)] zu jedem $x(0) > 0$ genau ein $x'(0) < 0$, derart, daß die durch diese Anfangsbedingungen bestimmte Lösung $x(t)$ der Differentialgleichung $x'' + f(t)x = 0$ für $0 \leq t < \infty$ positiv ist und abnimmt.

Hier wird gezeigt: Sind $x_n(t) = x(0) + x'(0)t - \int_0^t (t-s)f(s)x_{n-1}(s)ds$, $x_0(t) = x(0) + x'(0)t$, die sukzessiven Approximationen für $x(t)$, so liegt über der gesamten Halbachse $0 < t < \infty$ die Kurve $x = x_n(t)$ ganz oberhalb bzw. unterhalb der Kurve $x = x(t)$, je nachdem $n = 1, 2, 3, \dots$ oder $n = 2, 4, 6, \dots$.

F. W. Schäfke (Berlin).

Wallach, Sylvian: The stability of differential equations with periodic coefficients. Proc. nat. Acad. Sci. USA **34**, 203—204 (1948).

Es wird bewiesen: Ist $f(t)$ eine reelle, stetige, nicht konstante Funktion der Periode π , derart, daß mit einem ganzen n gilt: $n^2 \leq f(t) \leq (n+1)^2$, dann sind die charakteristischen Exponenten der Differentialgleichung $x'' + f(t)x = 0$ verschieden und stabil.

F. W. Schäfke (Berlin).

Wendel, J. G.: On a van der Pol equation with odd coefficients. J. London math. Soc. **24**, 65—67 (1949).

Es werden hinreichende Bedingungen dafür hergeleitet, daß die durch die Anfangswerte $x(0) = 0$, $x'(0) = x'_0$ bestimmte Lösung $x(t)$ der nichtlinearen Differentialgleichung $x'' + f(x)x' + g(x) = 0$ periodisch ist. Solche Bedingungen sind: $f(x)$ und $g(x)$ für alle x ungerade, $f(x)$ stetig, $g(x)$ stetig differenzierbar, $0 < x'_0 < \sqrt{2G(\infty)}$, und es ist IA, IIA oder IIB erfüllt. Dabei ist

$$F(x) = \int_0^x f(x) dx, \quad G(x) = \int_0^x g(x) dx,$$

I: $G(\infty) < \infty$, $F(x) \geq 0$ für alle x ; II: $G(\infty) = \infty$, $F(x) \geq 0$ für alle hinreichend großen x ; A: $0 < f(x) < kg(x)$ mit geeignetem $k > 0$ für alle hinreichend kleinen positiven x ; B: $F(x) \leq 0$ für alle hinreichend kleinen positiven x . Dieses Ergebnis enthält das von Elizabeth McHarg [dies. Zbl. **29**, 213]. Kamke.

Hartman, Philip: Unrestricted solution fields of almost-separable differential equations. Trans. Amer. math. Soc. **63**, 560—580 (1948).

Nella prima parte della sua memoria l'A. considera le equazioni

$$(1) \quad x' = g(x) + f(t) \quad [x' = dx/dt]$$

che egli chiami quasi separabili perché nei due casi $g(x) \equiv 0$, $f(t) \equiv 0$ si riducono rispettivamente alle equazioni elementari $x' = f(t)$, $x' = g(x)$, e studia l'andamento asintotico delle soluzioni quando $f(t)$ diventa piccola per $t \rightarrow \infty$. — In un primo teorema dimostra che ove siano soddisfatte le seguenti ipotesi: $g(x)$ e $f(t)$ siano funzioni reali e continue rispettivamente per $-\infty < x < +\infty$, $0 \leq t < +\infty$;

$$(2) \quad xg(x) < 0, \quad [g(0) = 0]; \quad (3) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} |g(x)| = \infty;$$

$$(4) \quad \lim_{u \rightarrow \infty} \left[\text{estr. sup.}_{0 < v < \infty} \left| \int_u^{u+v} f(t) dt \right| / (1+v) \right] = 0;$$

allora ogni soluzione $x = x(t)$ della (1) che soddisfi la condizione iniziale $x(t_0) = x_0$, anche se non unica, ha per campo di esistenza l'intervallo $(0, \infty)$ [con la terminologia dell'A. è non ristretta] e risulta per essa

$$(5) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0.$$

La (4) è altresì necessaria perché per una soluzione $x(t)$ della (1) valga la (5). — In un secondo teorema l'A. prova che ove all'ipotesi (2) si sostituisca l'altra

$$(6) \quad xg(x) > 0 \quad [g(0) = 0],$$

esiste allora almeno una soluzione della (1), definita in $(0, \infty)$ [non ristretta], tale che per essa resta verificata la (5). — La dimostrazione di questo teorema si fonda essenzialmente sul fatto che le soluzioni della (1) che soddisfano la condizione iniziale $x_n(n) = 0$ hanno per campo di esistenza l'intervallo $(0, n)$ e può associarsi ad esse una costante assoluta C tale che $|x_n(t)| < C$ per $0 \leq t \leq n$ ($n = 1, 2, \dots$). — In un terzo teorema con particolari ipotesi sulla $f(t)$, più restrittive della (4), si studia il comportamento delle $g[x(t)]$ e $x'(t)$ relative alle soluzioni $x(t)$ della (1) definite in (T, ∞) che soddisfano la (5). — La seconda parte della memoria è dedicata al comportamento asintotico delle soluzioni dell'equazione

$$y'' = \Phi(t)y \quad [y'' = d^2y/dt^2],$$

con la $\Phi(t)$ reale, definita per $0 \leq t < \infty$, continua, prossima ad una costante positiva per t sufficientemente grande. Questa con un cambiamento di variabile indipendente assume la cosiddetta forma tipica del „caso iperbolico“

$$(7) \quad y'' = [1 + f(t)]y,$$

con $f(t)$ reale, continua per $0 \leq t < \infty$, ed $f(t)$ „piccola“ per t sufficientemente grande. Alla (7) in un tratto in cui sia $y(t) \neq 0$ coll'introduzione della funzione incognita $x = y'/y$ può associarsi l'equazione $x' = 1 - x^2 + f(t)$ che è del tipo (1), e l'A. con l'uso dei teoremi della prima parte, dimostra che se $f(t)$ soddisfa la (4), allora ogni soluzione $y(t)$, non identicamente nulla, dell'equazione (6) ha al più un numero finito di zeri, e ammette una rappresentazione $y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t)$ con c_1 e c_2 costanti arbitrarie, essendo $y = y_1(t)$, $y = y_2(t)$ due integrali particolari della (1) col seguente comportamento asintotico

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y_1'(t)/y_1(t) = 1, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} y_2'(t)/y_2(t) = -1, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} y_1(t) y_2(t) = 1.$$

Inoltre, sempre nell'ipotesi che $f(t)$ soddisfi la (4), per qualunque soluzione $y(t)$ della (7) il limite $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) / \exp \left[t + \frac{1}{2} \int_0^t f(s) ds \right]$ esiste ed ha un valore finito. —

Il comportamento delle soluzioni è ulteriormente precisato quando si supponga $f(t)$ sommabile L^p con $p \geq 1$.

Giovanni Sansone (Firenze).

Bellman, Richard: On the boundedness of solutions of nonlinear differential and difference equations. Trans. Amer. math. Soc. **62**, 357—386 (1947).

Verf. studiert das Verhalten der Lösungen des Differentialgleichungssystems

$$dz_i/dt = \sum_{j=1}^N a_{ij}(t) z_j + f_i(z_1, z_2, \dots, z_N, dz_1/dt, \dots, dz_N/dt, t)$$

($i = 1, 2, \dots, N$) für $t \rightarrow \infty$. Der Fall, daß a_{ij} Konstante sind und f_i Potenzreihen nur der z_k sind, welche mit Gliedern zweiten Grades beginnen, wurde von Liapounoff untersucht. Der Fall, daß die f_i unabhängig von den dz_k/dt sind, wurde von Perron, Cotton, Bohl untersucht. Es sei $A = \{a_{ij}\}$ eine $N \times N$ -Matrix und

$\|A\| = \sum_{i,j=1}^N |a_{ij}|$ ihre Norm, es sei $a = \{a_i\}$ eine $N \times 1$ -Matrix (Vektor) und

$\|a\| = \sum_{i=1}^N |a_i|$ ihre Norm. — Durch das Iterationsverfahren beweist Verf. folgende

Sätze: Es seien A , $B(t)$, $B_1(t)$ $N \times N$ -Matrizen, wobei A konstant ist. I. Wenn $\|B\| \leq c_1$, $\|B_1\| \leq c_1$, wobei c_1 eine von A abhängige Konstante ist, wenn $\|\partial f(z, w, t)/\partial z_k\| + \|\partial f(z, w, t)/\partial w_k\| \rightarrow 0$ für $\|z\| + \|w\| \rightarrow 0$ gleichmäßig in bezug auf t , wenn die charakteristischen Wurzeln von A negative reelle Teile besitzen, dann a) gibt es für das System (1) $dz/dt = (A + B)z + B_1 dz/dt + f(z, dz/dt, t)$ eine N -dimensionale Mannigfaltigkeit von Lösungen z , die nach Null streben für $t \rightarrow +\infty$. II. Wenn $\|\partial f(z, w, t)/\partial z_k\| + \|\partial f(z, w, t)/\partial w_k\| \leq h(t)g(c)$ für $\|z\| + \|w\| \leq c$, wobei $h(t)$, $g(c)$ reelle Zahlen sind, wenn $\int_0^{+\infty} h(t) dt < \infty$ und $g(c) \rightarrow 0$

für $c \rightarrow 0$, wenn $\int_0^{+\infty} \|B\| dt \leq c_1$, $\int_0^{+\infty} \|B_1\| dt \leq c_1$, wobei c_1 eine von A abhängige

Konstante ist, wenn alle Lösungen des Systems $dy/dt = Ay$ beschränkt sind, dann gilt die Behauptung a). — Der Fall, in dem die f_i unabhängig von den dz_k/dt sind, wird von Verf. auch durch Anwendung des topologischen Birkhoff-Kellogischen Fixpunktsatzes untersucht, wobei Sätze I und II unter etwas schwächeren Bedingungen erhalten werden. Für weitere Sätze und Ausdehnungen auf Differenzgleichungssysteme müssen wir auf die Arbeit verweisen.

L. Cesari (Bologna).

Bellman, Richard: On an application of a Banach-Steinhaus theorem to the study of the boundedness of solutions of non-linear differential and difference equations. Ann. Math., Princeton, II. s. **49**, 515—522 (1948).

Es sei $k = \{k_{ij}\}$ eine $n \times n$ -Matrix und $\|k\| = \sum_{i,j=1}^n |k_{ij}|$ ihre Norm; es sei $u = \{u_i\}$ eine $n \times 1$ -Matrix (Vektor) und $\|u\| = \sum_{i=1}^n |u_i|$ ihre Norm. Der im

Titel genannte Satz lautet: Wenn $u(t) = \int_0^{+\infty} k(t, t_1) v(t_1) dt_1$, $t \geq 0$, und $u(t)$ für jeden gegebenen Vektor $v(t)$ beschränkt ist, vorausgesetzt, daß entweder a)

$\|v(t)\| \leq c_1 < \infty$, oder b) $\int_0^{+\infty} \|v(t)\| dt < \infty$, oder c) $\int_0^{+\infty} \|v(t)\|^2 dt < \infty$, dann ist die Matrix $k(t, t_1)$ so beschaffen, daß beziehungsweise a) $\|k(t, t_1)\| \leq c_2$ für alle $t, t_1 \geq 0$, b) $\int_0^{+\infty} \|k(t, t_1)\| dt_1 \leq c_2$ für alle $t \geq 0$, c) $\int_0^{+\infty} \|k(t, t_1)\|^2 dt_1$ für alle $t \geq 0$.

Betrachten wir die Differentialgleichungssysteme:

$$(1) \quad dz/dt = A(t)z + \Phi(z, t), \quad (2) \quad dz/dt = A(t)z + \Phi(t),$$

wobei $A(t)$ eine $n \times n$ -Matrix, $z(t)$, $\Phi(z, t)$, $\Phi(t)$ Vektoren sind. In Anwendung des obigen Satzes beweist Verf. folgendes: Alle Lösungen von (1) sind beschränkt für jeden Vektor $\Phi(z, t)$ mit entweder a) $\|\Phi(z, t)\| \leq c_1$, oder b) $\|\Phi(z, t)\| \leq f(t)$,

$\int_0^{+\infty} f(t) dt < \infty$, oder c) $\|\Phi(z, t)\| \leq f(t)$, $\int_0^{+\infty} f^2(t) dt < \infty$, dann und nur dann, wenn alle Lösungen von (2) beschränkt sind für jeden Vektor $\Phi(t)$ mit beziehungsweise a) $\|\Phi(t)\| \leq c_2 < \infty$, b) $\int_0^{+\infty} \|\Phi(t)\| dt < \infty$, c) $\int_0^{+\infty} \|\Phi(t)\|^2 dt < \infty$. — Der

Fall a) war von O. Perron mit besonderen Verfahren untersucht worden [Math. Z. **32**, 465—473 (1930)]. Wie in der Arbeit von O. Perron, werden auch hier Bedingungen gegeben, damit alle Lösungen von (2) nach Null streben, wenn $t \rightarrow \infty$.

L. Cesari (Bologna).

Nehari, Zeev: On the accessory parameters of a Fuchsian differential equation. Amer. J. Math. **71**, 24—39 (1949).

Der Quotient $w(z) = y_1(z)/y_2(z)$ zweier linear unabhängiger Lösungen der Fuchsschen Differentialgleichung

$$(1) \quad y'' + \left\{ \frac{1-\alpha}{z-a} + \frac{1-\beta}{z-b} + \frac{1-\gamma}{z-c} \right\} y' + \frac{Az+B}{(z-a)(z-b)(z-c)} y = 0$$

bildet $\Im z > 0$ konform in ein Kreisbogenviereck ab. Verf. beschäftigt sich mit dem Zusammenhang zwischen dem akzessorischen Parameter B und den geometrischen Größen des Kreisbogenpolygons. Die w -Kreise, die $w = y_1/y_2$ -Bilder der Strecken $a < z < b$, $b < z < c$, $c < z < \infty$ enthalten, seien K_{ab} , K_{bc} , $K_{c\infty}$. Die Gerade durch die Mittelpunkte von K_{ab} , $K_{c\infty}$ bzw. K_{bc} , $K_{c\infty}$ schneidet die Kreise in vier Punkten, aus denen durch passende Auswahl ein Doppelverhältnis t_1 bzw. t_2 gebildet wird. Zwischen diesen Doppelverhältnissen und dem Parameter B wird ein Zusammenhang hergestellt. — Dazu transformiert Verf. die Ausgangsdifferentialgleichung (1) mit Hilfe elliptischer Funktionen in eine Differentialgleichung mit periodischen Koeffizienten

$$(2) \quad Y'' + (g(u) + \lambda) Y = 0,$$

wobei sich λ durch die Bestimmungsgrößen aus (1) elementar ausdrücken läßt. Die für diese Differentialgleichungen gültigen Lösungsansätze von Floquet und Hill führen dann bei gegebenem t_1 zu einer transzendenten Bedingungsgleichung $D(\lambda) = t_1$ für λ und damit auch für B ; die Gleichung hat aus funktionentheoretischen Gründen [$D(\lambda)$ ist eine ganze transzendente Funktion in λ von einer Ordnung $\leq \frac{1}{2}$] unendlich viele Lösungen. Im Falle eines Kreisbogenpolygons mit n Ecken treten in (1) $n-3$ akzessorische Parameter auf. Die Behandlung dieser Differentialgleichung verläuft entsprechend. Dem gegebenen Polygon werden $n-3$ analog definierte Doppelverhältnisse t_j zugeordnet, und die akzessorischen Parameter erscheinen dann als Lösungen von $n-3$ transzendenten Gleichungen $D_j(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-3}) = t_j$, $j = 1, 2, \dots, n-3$. Wittich (Karsruhe).

Sawyer, W. W.: Differential equations with polynomial solutions. Quart. J. Math. (Oxford Ser.) **20**, 22—30 (1949).

Es werden notwendige und hinreichende Bedingungen dafür aufgestellt, daß die Differentialgleichung

$$a(x) y'' + b(x) y'(x) + c(x) y = \lambda \{ A(x) y'' + B(x) y' + C(x) y \}$$

für jedes nicht-negative ganze n zu einem Eigenwert λ_n des Parameters eine Polynomlösung vom genauen Grade n besitzt. Das Verfahren besteht in der Bildung einer Folge ähnlicher Differentialgleichungen für die Ableitungen $y^{(n)}(x)$.

F. W. Schäfke (Berlin).

Freilich, Gerald: Note on the eigenvalues of the Sturm-Liouville differential equation. Bull. Amer. math. Soc. **54**, 405—408 (1948).

Es wird der Vergleichssatz bewiesen: Für die Koeffizienten der Sturm-Liouville'schen Differentialgleichungen $(p_1 u')' - q_1 u + \lambda \varrho_1 u = 0$, $(p_2 u')' - q_2 u + \lambda \varrho_2 u = 0$ gelte $0 < p_1(x) \leq p_2(x)$, $0 \leq q_1(x) \leq q_2(x)$, $\varrho_1(x) \geq \varrho_2(x) > 0$ in $a \leq x \leq b$.

Dann hat man für ihre der Größe nach geordneten Eigenwerte λ_n bzw. μ_n unter den Randbedingungen $u(a) = c_1 u(b)$, $u'(a) = c_2 u'(b)$, $c_1 c_2 p(a) = p(b)$ immer $\mu_n \geq \lambda_n$. Zum Beweise wird das folgende Min-Max-Prinzip benutzt: Seien v_1, v_2, \dots, v_n beliebige zulässige Funktionen, so ist das Maximum des Rayleighschen Quotienten für alle Linearkombinationen der v_i $g(v_i) \geq \lambda_n$. Variiert man dann die v_i , so wird $\min g(v_i) = \lambda_n$. — Bemerkungen des Ref.: Daß der Satz Spezialfall eines weit allgemeineren, für definite selbstadjungierte Probleme unmittelbar aus dem Courant-schen Prinzip folgenden Abschätzungssatzes ist, scheint Verf. entgangen zu sein. Die Arbeit bringt keine Literaturangaben und formuliert keine Stetigkeits- und Differenzierbarkeitsvoraussetzungen.

F. W. Schöpfke (Berlin).

Hulthén, Lamék: On the Sturm-Liouville problem connected with a continuous spectrum. Ark. Mat. Astron. Fysik A 35, Nr. 25, 14 S. (1948).

Verf. geht von der Differentialgleichung

$$\frac{d^2 \Phi}{dx^2} + k^2 \Phi + v(x) \Phi = 0, \quad 0 \leq x < \infty, \quad k > 0, \quad \Phi(\infty) \text{ endlich}, \quad \Phi(0) = 0$$

aus und behandelt den Fall der Existenz von Lösungen für beliebige positive k^2 , also den eines kontinuierlichen Spektrums. Bereits bei früherer Gelegenheit [vgl. L. Hulthén, Fys. Sällsk. Lund Förhandl. 14, Nr. 21, 1944 und dies. Zbl. 30, 257] gelang es, zu zeigen, daß auch im vorliegenden Falle die Berechnung der Eigenfunktionen und Eigenphasen des Problems analog zu den wohlbekannten Methoden des Falles diskreter Spektren möglich ist. — Das zugehörige Variationsproblem wurde nunmehr neu formuliert, indem die Funktion $\Phi(x)$ durch $y(x)$ gemäß der Beziehung

$$\Phi(x) = \sin(kx + \eta) - y(x) \sin \eta$$

ersetzt wird. Die so entstehende Differentialgleichung für $y(x)$ wird als Eulersche Differentialgleichung des Variationsproblems

$$\delta \int_0^\infty F(x, y, y') dx = 0, \quad F(x, y, y') = -y'^2 + k^2 y^2 + v(x) (\cos kx - y)^2$$

aufgefaßt mit der Nebenbedingung

$$N = \int_0^\infty G(x, y) dx = \text{const}; \quad G(x, y) = v(x) \sin kx (\cos kx - y).$$

Als Anwendung wird mit $v(x) = b e^{-x/x}$ ein Yukawa-Potential behandelt. Die Entwicklungen werden auch approximativ weitergeführt und mehrere Zahlentabellen berechnet.

M. Pinl (Köln).

Putnam, C. R.: On the spectra of certain boundary value problems. Amer. J. Math. 71, 109—111 (1949).

Data l'equazione

$$(1) \quad x'' + [\lambda + q(t)] x = 0 \quad [x'' = d^2 x / dt^2]$$

dove $q(t)$ è una funzione reale, definita per $t \geq 0$, continua, della classe L^2

$$(2) \quad \int_0^\infty q^2(t) dt < \infty,$$

l'A. dimostra che essa è, con la denominazione di H. Weyl, nel così detto Grenzpunktfall, che esiste cioè un valore di λ (e quindi per ogni λ) cui corrisponde una soluzione $x(t)$ dell'equazione (1) non appartenente alla classe L^2 , per la quale si ha perciò

$$\int_0^\infty x^2(t) dt = \infty.$$

Si ha inoltre che la semiretta $\lambda \geq 0$ appartiene allo spettro dei valori di λ (insieme degli autovalori e dei loro punti di accumulazione) cui corrispondono soluzioni della (1), non identicamente nulle, che soddisfano per un prefissato valore di θ la condi-

zione ai limiti

$$(3\theta) \quad x(0) \cos \theta + x'(0) \sin \theta = 0 \quad (0 \leq \theta < \pi)$$

e la condizione integrale

$$(4) \quad \int_0^{\infty} x^2(t) dt < \infty.$$

Se invece della (2) si suppone che $q(t)$ soddisfi la

$$(2') \quad \int_0^{\infty} t q^2(t) dt < \infty$$

il teorema è contenuto in un risultato di S. Wallach [Amer. J. Math. **70**, 833—841 (1948)].

Giovanni Sansone (Firenze).

Hartman, Philip: On the spectra of slightly disturbed linear oscillators. Amer. J. Math. **71**, 71—79 (1949).

L'equazione

$$(1) \quad x'' + [\lambda + q(t)] x = 0 \quad [x'' = d^2x/dt^2],$$

dove $q(t)$ è una funzione reale, definita per $t \geq 0$, continua, soddisfacente la condizione:

$$(2) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} q(t) = 0,$$

può essere interpretata come l'equazione del moto di un oscillatore armonico soggetto a piccole perturbazioni. Nell'ipotesi (2), un teorema di H. Weyl assicura che fissato un valore di θ , $0 < \theta < \pi$, esiste almeno un valore di λ (autovalore) cui corrisponde una soluzione di (1) soddisfacente la condizione ai limiti:

$$(3\theta) \quad x(0) \cos \theta + x'(0) \sin \theta = 0 \quad (0 \leq \theta < \pi)$$

e la condizione integrale

$$(4) \quad \int_0^{\infty} x^2(t) dt < \infty.$$

L'A. dimostra che fissato θ , allo spettro dei valori di λ (insieme degli autovalori e dei loro punti di accumulazione) corrispondenti alla (3 θ) e alla (4), appartengono tutti i valori della semiretta $\lambda \geq 0$.

Giovanni Sansone (Firenze).

Wasow, Wolfgang: The complex asymptotic theory of a fourth order differential equation of hydrodynamics. Ann. Math., Princeton, II. s. **49**, 852—871 (1948).

Verf. betrachtet mit $N[y] = \sum_{k=0}^n a_k(x) y^{(n-k)}$ und $M[y] = \sum_{k=0}^m b_k(x) y^{(m-k)}$

($n > m$) die lineare Differentialgleichung (1) $N[y] + \lambda M[y] = 0$ für $y(x)$ und fragt nach dem asymptotischen Verhalten der Lösungen von (1) für $\lambda \rightarrow \infty$. Die Betrachtungen werden in Komplexen durchgeführt, und zwar unter der wesentlichen Annahme, daß $b_0(x)$ im betrachteten Bereich bei $x = 0$ eine Nullstelle erster Ordnung besitzt, wogegen $a_0(x)$ dort nicht verschwindet. Die Beweisführung beschränkt sich auf den für die Anwendungen wichtigen Spezialfall $n = 4$, $m = 2$. Wird

$Q(x) = \int_0^x \sqrt{-b_0(\xi)} d\xi$ gesetzt und ein zweifach zusammenhängendes Gebiet S :

$0 < |Q(x)| \leq K$ (K so klein, daß S keine Nullstellen von $b_0(x)$ enthält) betrachtet, so gibt es in der x -Ebene drei Kurven C_i ($i = 1, 2, 3$) durch $x = 0$, auf denen $\operatorname{Re}(\lambda Q(x)) = 0$ ist und die S in drei Sektoren S_i zerlegen, wobei S_k von den C_j ($j \neq k$) begrenzt sei. Bezeichnet schließlich noch das Symbol $E(T)$ irgend eine Funktion von x und λ , die in jedem abgeschlossenen Teilbereich von T samt ihren Ableitungen nach x beschränkt ist und für $|\lambda| \rightarrow \infty$ gleichmäßig konvergiert, so ergeben sich z. B. Sätze folgender Art, die das asymptotische Verhalten der Lösungen von (1) für $|\lambda| \rightarrow \infty$ betreffen: 1. Ist $\operatorname{Re}(\lambda Q(x)) < 0$ in S'_k , so gibt es

Lösungen von (1) mit der asymptotischen Darstellung

$$A_k(x, \lambda) = e^{\lambda Q(x)} \left[\sum_{\nu=0}^t \sigma_{1\nu}(x) \lambda^{-\nu} + E(S - C_k) \lambda^{-t-1} \right] \quad (k = 1, 2, 3; t \text{ beliebig}),$$

wobei $Q(x)$ und $\sigma_{1\nu}(x)$ regulär in $S - C_k$ sind. 2. Ist $u(x)$ eine Lösung von $M[y] = 0$, so hat (1) Lösungen der Gestalt

$$U_k(x, \lambda) = u(x) + E(S - S_k) \lambda^{-2} \quad (k = 1, 2, 3).$$

Diese Sätze werden insbesondere bei den Randwertaufgaben von (1) angewendet. Ein wichtiges Beispiel aus der Hydrodynamik liefert hierzu die Untersuchung der Stabilität einer ebenen stationären Wandströmung in einer reibenden inkompressiblen Flüssigkeit nach der Methode der kleinen Schwingungen. Die Frage nach der Legalität der in den älteren Arbeiten (insbes. von Tollmien 1929) durchgeführten asymptotischen Betrachtungen kann, wie Verf. ohne nähere Durchführung angibt, auf diesem Wege in Angriff genommen werden. Maruhn (Dresden).

Partielle Differentialgleichungen. Potentialtheorie:

Lavrent'ev (Lavrentiev), M.: Das allgemeine Problem der Theorie der quasikonformen Abbildungen ebener Bereiche. Mat. Sbornik, II. s. 21, 285—320 (1947) [Russisch].

Jede Lösung u, v des Systems von partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung $\Phi_k(x, y, u, v, u_x, u_y, v_x, v_y) = 0$ ($k = 1, 2$) vermittelt, allgemein zu reden, eine Abbildung eines x, y -Gebietes auf ein u, v -Gebiet, und diese Abbildungen werden quasikonform genannt. Das Problem der quasikonformen Abbildungen besteht darin, zwei gegebene Bereiche der x, y - bzw. der u, v -Ebene derart topologisch aufeinander abzubilden, daß $u(x, y)$ und $v(x, y)$ einem vorgelegten Differentialgleichungssystem $\Phi_k = 0$ genügen. Dieses Problem wird für den Fall behandelt, daß der Originalbereich streifenförmig $[-\infty < x < \infty, y_1(x) < y < y_2(x), y_i(x)$ zweimal stetig differenzierbar, y'_i und y''_i beschränkt], der Bildbereich ein Parallelstreifen ($0 < v < 1$) ist und daß das Gleichungssystem die Größen x, y, u, v nicht explizit enthält und stark elliptisch ist. Während sich allgemeinere Bereichformen sowie Gleichungssysteme, die die Koordinaten enthalten, nach einer Schlußbemerkung des Verf. ähnlich behandeln lassen, ist die Beschränkung auf stark elliptische Systeme wesentlich. Ein System linearer Differentialgleichungen $u_x = a_{11}v_x + a_{12}v_y + a_{13}, u_y = a_{21}v_x + a_{22}v_y + a_{23}$ (a_{ik} stetig von x, y, u, v abhängig) heißt bekanntlich elliptisch für $(a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}a_{21} < 0$, es heißt stark elliptisch, wenn darüber hinaus der Ausdruck $a_{12} \cos^2 \alpha + (a_{11} - a_{22}) \sin \alpha \cos \alpha - a_{21} \sin^2 \alpha$ größer als eine positive Konstante k bleibt. Auf den linearen Fall wird der allgemeine folgendermaßen zurückgeführt. Als Charakteristiken der Abbildung für zugeordnete Punkte x, y und u, v werden bezeichnet der Winkel α , den das Original des Elementes ($du > 0, 0$) mit der x -Achse bildet, das zu diesem Element gehörige lineare Vergrößerungsverhältnis $V (= |dz|/du)$, der Winkel Θ , um den man das Element in der x, y -Ebene drehen muß, damit im Bilde ein rechter Winkel zustande kommt, und eine Größe W , die analytisch dadurch definiert werden kann, daß das Produkt $V \cdot W$ gleich der als positiv vorausgesetzten Funktionaldeterminante von x, y nach u, v ist. Das vorgelegte System wird dann in der Form geschrieben: $W = F_1(x, y, u, v, V, \alpha), \Theta = F_2(x, y, u, v, V, \alpha)$. Die Größen $P = \log V$ und α genügen einem linearen Differentialgleichungssystem $P_v = a_1 P_u + a_2 \alpha_u + a_3, \alpha_v = b_1 P_u + b_2 \alpha_u + b_3$, wobei die Koeffizienten elementar aus F_1 und F_2 berechnet werden können. Treten x, y, u, v nicht explizit auf, so gilt $a_3 = b_3 = 0$. Das Ausgangssystem heißt stark elliptisch, wenn das „abgeleitete“ lineare System stark elliptisch ist. Die zur Herstellung der quasikonformen Abbildung nötige Integration des Ausgangssystems benützt als Zwischenstadium das eben eingeführte oder jedenfalls ein damit zusammenhängendes lineares System.

Im übrigen werden eine Reihe von Sätzen und Hilfsmitteln benützt, die aus der Theorie der konformen Abbildung bekannt sind und sich übertragen lassen (Prinzip des Maximums, alternierendes Verfahren usw.) — Die Lektüre wird leider erschwert, durch den Umstand, daß die Beweise z. T. nur angedeutet sind und daß der Formelapparat eine Reihe von Druckfehlern enthält. *Brödel* (Jena).

Potts, D. H.: Generalized Laplacians of higher order. *Duke math. J.* **15**, 947 bis 951 (1948).

Die von Blaschke [Ber. Sächs. Akad. Wiss. Leipzig, Math.-phys. Kl. **68**, 3—7 (1916)] und Privaloff [Mat. Sbornik **32**, 464—471 (1926)] eingeführten verallgemeinerten Laplaceoperatoren werden itieriert. Verf. beweist, daß unter gewissen Stetigkeitsbedingungen der Mittelwert einer Funktion in oder auf einem r -Kreise sich nach Potenzen von r entwickeln läßt, wobei die Koeffizienten die durch Iteration erhaltenen höheren Operatoren enthalten. — Leider wird die Bezeichnung ∇ , zwar mit Index, statt Δ für einen ∇^2 entsprechenden Operator benutzt. *G. af Hällström* (Åbo).

Maruhn, Karl: Bemerkungen über das Verhalten von Potentialfunktionen im Unendlichen. *Arch. Math.*, Oberwolfach **1**, 253—262 (1949).

À partir d'un développement à l'infini déjà classique des fonctions harmoniques (analogue à celui de Laurent) l'aut. tire diverses propriétés et remarques sur l'allure des fonctions à l'infini (plan ou espace), regroupant et améliorant des résultats anciens, mais d'ailleurs à peu près contenus dans des travaux plus développés, inconnus de l'aut. [Brelot, *Actual sci. industr.* No. 139 (1934); *ce. Zbl.* **9**, 19 et *Ann. sci. Ecole norm. sup.*, III. s. **61**, 301 (1944)]. Des applications en sont faites aux problèmes extérieurs aux limites des trois types courants. *Brelot* (Grenoble).

Gorski, Jerzy: Sur l'équivalence de deux constructions de la fonction de Green généralisée d'un domaine plan quelconque. *Ann. Soc. Polonaise Math.* **21**, 70—73 (1948).

Es sei D ein ebener, den Punkt $z = \infty$ enthaltender Bereich und F seine Berandung mit positivem transfinitem Durchmesser. Leja (dies. *Zbl.* **8**, 208 und **10**, 201) konstruierte mit Hilfe einer Folge von Polynomen eine gewisse, in D außer $z = \infty$ harmonische Funktion $G_0(z)$ und zeigte, falls F aus endlich vielen Kontinuen besteht, die Identität von G_0 mit der klassischen, zum Pol $z = \infty$ gehörenden Greenschen Funktion von D . Diese Funktion G_0 läßt sich auch bei beliebigem Rande konstruieren. Verf. zeigt, daß in diesem Falle G_0 mit der verallgemeinerten Greenschen Funktion im Sinne von O. D. Kellogg und N. Wiener übereinstimmt. *Maruhn* (Dresden).

Birkhoff, Garrett and Lindley Burton: Note on Newtonian force-fields. *Canadian J. Math.* **1**, 199—208 (1948).

Es werden eine Reihe bekannter potentialtheoretischer Sätze durch Heranziehung des Lebesgueschen Integralbegriffs verallgemeinert. Es sei $\varrho(x_1, \dots, x_n)$ gegeben in einem beschränkten Gebiet R des euklidischen n -dimensionalen Raumes.

Mit dem Potential $U(a) = \int_R \frac{\varrho(x)}{r^{n-2}} dV$ ($n \geq 3$) bzw. $U(a) = - \int_R \varrho(x) \ln r dV$ ($n = 2$)

und den Kraftkomponenten $F_i(a) = (n-2) \int_R \frac{\varrho(x)(x_i - a_i)}{r^n} dV = \int_R \frac{\partial}{\partial a_i} \left(\frac{1}{r^{n-2}} \right) \varrho(x) dV$

($n \geq 3$) bzw. $F_i(a) = \int_R \frac{\varrho(x)(x_i - a_i)}{r^2} dV = - \int_R \varrho(x) \frac{\partial \ln r}{\partial a_i} dV$ ($n = 2$) [$a = (a_1, \dots, a_n)$,

$x = (x_1, \dots, x_n)$, $r^2 = \sum_i (x_i - a_i)^2$] ergibt sich z. B.: 1. Ist $\varrho(x)$ im Lebesgueschen Sinne über R integrierbar und bezeichnet T irgendeinen von der (im Kelloggschen Sinne) regulären Hyperfläche S begrenzten Teilbereich,

so gilt $\int_S N dS = (2-n) \omega_n \int_T \varrho dV$ ($n \geq 3$) (N = Normalkomponente der Attraktionskraft, ω_n = Flächeninhalt der n -dimensionalen Einheitskugel). 2. Die $F_i(a)$ existieren dann und nur dann, wenn ϱ meßbar und $\int_{\tilde{R}} \frac{|\varrho|}{r^{n-1}} dV < \infty$ ist. 3. Damit die $F_i(a)$ und $\partial U(a)/\partial a_i$ existieren, stetig und einander gleich sind, ist es hinreichend, daß für irgendeine Funktion $f(\delta)$ mit $f \rightarrow 0$ für $\delta \rightarrow 0$ $\int_{S(\delta)} \frac{|\varrho|}{r^{n-1}} dV < f(\delta)$ ist für alle δ (r der Abstand der Punkt x und c) und für alle c in einer gewissen Kugel um a [$S(\delta)$ Kugelkörper vom Radius δ um c]. 4. Unter den Voraussetzungen von 2. existiert für fast alle Richtungen $w = (w_1, \dots, w_n)$ die Ableitung $\partial U(a)/\partial w$ und ist gleich $w_1 F_1(a) + \dots + w_n F_n(a)$. 5. Es bezeichne

$$\nabla_P^2 U(a) = \lim_{h \rightarrow \infty} \frac{1}{h^2} \sum_{i=1}^n [U(a + h e_i) + U(a - h e_i) - 2U(a)]$$

den verallgemeinerten Laplaceschen Ausdruck und es sei ϱ bei a meßbar und beschränkt und besitze mittlere Stetigkeit [d. h. $\frac{1}{c^n} \int_{S(c)} |\varrho(x) - \varrho(a)| dV \rightarrow 0$ für $c \rightarrow 0$, $S(c)$ der Kugelkörper vom Radius c um a]. Dann existiert $\nabla_P^2 U(a)$ und erfüllt die Poissonsche Gleichung $\nabla^2 U + (n-2) \omega_n \varrho = 0$ ($n \geq 3$) bzw. $\nabla^2 U + 2\pi \varrho = 0$ ($n = 2$).
Muruhn (Dresden).

Funktionalanalysis. Abstrakte Räume:

Montel, Paul: Sur les équations fonctionnelles caractérisant les polynomes. C. r. Acad. Sci., Paris **226**, 1053—1055 (1948).

Soit $\Delta_h[f] = f(x+h) - f(x)$, $\Delta_{h_n} \Delta_{h_{n-1}} \dots \Delta_{h_1}[f] = \Delta_{h_n} [\Delta_{h_{n-1}} \Delta_{h_{n-2}} \dots \Delta_{h_1}[f]]$. Généralisant ses résultats antérieurs [ce Zbl. **15**, 345] l'auteur énonce les résultats suivants: 1. Toute fonction continue $f(x)$, d'une variable réelle x , qui vérifie le système de deux équations

$$\Delta_{h_1} \Delta_{h_2} \dots \Delta_{h_n}[f] = 0, \quad \Delta_{k_1} \Delta_{k_2} \dots \Delta_{k_n}[f] = 0,$$

est un polynome de degré $n-1$, pourvu que les rapports h_i/k_j , $i, j = 1, 2, \dots, n$, soient tous irrationnels. 2. La propriété subsiste pour les fonctions analytiques $f(z)$ de la variable complexe z , qui vérifient le système de trois équations

$$(*) \quad \Delta_{h_1} \Delta_{h_2} \dots \Delta_{h_n}[f] = 0, \quad \Delta_{k_1} \Delta_{k_2} \dots \Delta_{k_n}[f] = 0, \quad \Delta_{l_1} \Delta_{l_2} \dots \Delta_{l_n}[f] = 0,$$

pourvu que les „périodes“ h_i, k_j, l_s soient indépendentes quels que soient $i, j, s = 1, 2, \dots, n$. 3. Toute solution continue $f(z)$ ($z = x + iy$) du système (*) est un polynome de degré $(n-1)(n+2)/2$ en x et y , pourvu que les périodes h_i, k_j, l_s soient strictement indépendantes [les nombres du module (h_i, k_j, l_s) soient partout denses dans le plan]. Dans ce dernier cas, si le degré du polynome dépasse $n-1$, ses coefficients sont soumis à certaines conditions liées aux périodes, conditions qui sont exprimées sous une forme élégante par l'auteur. T. Popoviciu (Cluj).

Taylor, Angus E.: A geometric theorem and its application to biorthogonal systems. Bull. Amer. math. Soc. **53**, 614—616 (1947).

Zunächst wird für den n -dimensionalen Euklidischen Raum E_n gezeigt: Theorem 1: Sei S eine beschränkte abgeschlossene Punktmenge und O ein Punkt im E_n , so daß die Vereinigungsmenge $O + S$ nicht in einer Hyperebene liegt. Dann gibt es n linear unabhängige, von O ausgehende Vektoren x_1, x_2, \dots, x_n mit Endpunkten P_1, P_2, \dots, P_n aus S und n Hyperebenen p_1, p_2, \dots, p_n mit den Eigenschaften: für alle i liegt P_i auf p_i , ist p_i parallel den Vektoren $x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n$, ist p_i Stützebene von $S + O$ ($S + O$ liegt in einem der beiden durch p_i gebildeten Halbräume und hat von p_i den Abstand 0). Beweisprinzip: das Volumen

des von den n Vektoren x_i gebildeten Parallelepipeds soll ein Maximum sein. — Mit Hilfe dieses Satzes und des Hahn-Banachschen Existenzsatzes [vgl. S. Banach, *Opérations linéaires*, Warszawa 1932, p. 55; dies. Zbl. 5, 209] für lineare Funktionale wird dann abgeleitet: Theorem 2: Sei Y_n ein n -dimensionaler Unterraum des reellen linearen normierten (Banachschen) Raumes X . Dann gibt es ein „Biorthonormalsystem“ $\{x_1, \dots, x_n\}, \{f_1, \dots, f_n\}$ mit x_i aus Y_n . [Biorthonormalsystem: $\|x_i\| = \|f_i\| = 1, f_i(y_k) = \delta_{ik}$.] F. W. Schäfke (Berlin).

Aronszajn, N.: Rayleigh-Ritz and A. Weinstein methods for approximation of eigenvalues. I. Operators in a Hilbert space. Proc. nat. Acad. Sci. USA 34, 474—480 (1948).

H sei ein symmetrischer vollstetiger Operator im Hilbert-Raum \mathfrak{H} . Ist P der einem Unterraum $\mathfrak{Q} \subset \mathfrak{H}$ entsprechende Projektionsoperator, so ist PH als Operator in \mathfrak{Q} symmetrisch und vollstetig. Die Eigenwerte, der Resolventenoperator usw. dieses Operators werden auch als Eigenwerte usw. von H in \mathfrak{Q} bezeichnet. Es seien stets $\lambda_0 \geq \lambda_1 \geq \lambda_2 \cdots \rightarrow 0$ die positiven, $\mu_0 \leq \mu_1 \leq \mu_2 \cdots \rightarrow 0$ die negativen Eigenwerte, abbrechende Folgen durch Nullen ergänzt. Verf. untersucht Größenbeziehungen zwischen den Eigenwerten von H in verschiedenen Unterräumen \mathfrak{Q} . U. a. werden aufgestellt: Theorem I: Seien $\mathfrak{Q}' \subset \mathfrak{Q}$, $\mathfrak{Q}'' = \mathfrak{Q} \ominus \mathfrak{Q}'$ und λ_n, μ_n bzw. λ'_n, μ'_n bzw. λ''_n, μ''_n die zugehörigen Eigenwerte, so gilt $\lambda_{i+j} + \mu_0 \leq \lambda'_i + \lambda''_j$, $\mu_{i+j} + \lambda_0 \geq \mu'_i + \mu''_j$ ($i, j = 0, 1, 2, \dots$). Theorem II: Konvergieren $\mathfrak{Q}^{(n)} \rightarrow \mathfrak{Q}$, d. h. die zugehörigen $P^{(n)} \rightarrow P$, so $\lambda_k^{(n)} \rightarrow \lambda_k, \mu_k^{(n)} \rightarrow \mu_k$. Theorem III: Seien $\mathfrak{Q}' \subset \mathfrak{Q}$; $\mathfrak{Q} \ominus \mathfrak{Q}'$ n -dimensional; p_1, p_2, \dots, p_n den Unterraum $\mathfrak{Q} \ominus \mathfrak{Q}'$ aufspannende Vektoren; R_λ der Resolventenoperator von H in \mathfrak{Q} und $u_m(\lambda) = R_\lambda p_m$ ($m = 1, 2, 3, \dots, n$). Man bilde die Weinsteinsche Determinante $W(\zeta) = \det [(u_m(\zeta), p_k)]$ und die Gramsche Determinante $\Gamma[p_k] = \det [(p_m, p_k)]$. Dann ist $\Phi(\zeta) = W(\zeta)/\Gamma[p_k]$ nur von $H, \mathfrak{Q}, \mathfrak{Q}'$ abhängig, eine meromorphe Funktion von ζ abgesehen von $\zeta = 0$, regulär für $\zeta = \infty$ und darstellbar durch das Produkt

$$\Phi(\zeta) = \left(\frac{-1}{\zeta}\right)^n \prod_{k=0}^{\infty} \frac{(\zeta - \lambda'_k)}{(\zeta - \lambda_k)} \prod_{k=0}^{\infty} \frac{(\zeta - \mu'_k)}{(\zeta - \mu_k)},$$

wo λ_k, μ_k bzw. λ'_k, μ'_k die Eigenwerte von H in \mathfrak{Q} bzw. \mathfrak{Q}' sind. — Das Weinsteinsche Verfahren erhält Approximationen für die Eigenwerte in einem Unterraum \mathfrak{Q} durch eine Folge $\mathfrak{Q}^{(0)} \supset \mathfrak{Q}^{(1)} \supset \mathfrak{Q}^{(2)} \supset \dots \rightarrow \mathfrak{Q}$ und liefert untere Schranken für die positiven, obere für die negativen Eigenwerte; das Verfahren von Rayleigh-Ritz nimmt eine aufsteigende Folge $\mathfrak{Q}^{(0)} \subset \mathfrak{Q}^{(1)} \subset \dots \rightarrow \mathfrak{Q}$ und bekommt obere Schranken für die positiven, untere für die negativen Eigenwerte. — Beweise werden nicht durchgeführt.

F. W. Schäfke (Berlin).

Köthe, Gottfried: Eine axiomatische Kennzeichnung der linearen Räume vom Typus ω . Math. Ann., Berlin 120, 634—649 (1949).

Soit K un corps topologique commutatif; l'auteur caractérise les espaces vectoriels topologiques de la forme K^S (S ensemble quelconque) comme les espaces séparés E sur K , munis d'une topologie faible $\sigma(E, E')$ pour laquelle ils sont complets [cf. J. Dieudonné, Bull. Soc. Math. France 70, 46—75 (1942), p. 66, note ²²]; il est inutile de supposer le corps K commutatif]. La caractérisation de la puissance de l'ensemble S (unique invariant caractérisant ces espaces) peut se faire de diverses manières, par exemple en imposant à l'espace E d'avoir une base topologique (e_α) équipotente à S [une telle base étant définie par la propriété que toute famille $(\xi_\alpha e_\alpha)$ est sommable dans E , quels que soient les $\xi_\alpha \in K$, et que tout $x \in E$ est somme d'une telle famille d'une seule manière]. L'auteur étudie enfin les applications continues d'un tel espace E dans lui-même, qui, en considérant les transposées, se ramènent immédiatement aux applications linéaires quelconques de l'espace dual $E' = K^{(S)}$ dans lui-même.

J. Dieudonné (Nancy).

Halmos, Paul R.: On a theorem of Dieudonné. *Proc. nat. Acad. Sci. USA* **35**, 38—42 (1949).

A toute σ -algèbre booléenne A et à toute mesure λ définie sur A , on peut associer, par le théorème de Stone, un espace compact totalement discontinu Y et une application biunivoque de A/λ sur l'algèbre booléenne E des ensembles à la fois ouverts et fermés dans Y ; par cette application, λ a pour image une mesure μ sur Y ; on dit que Y est l'espace de Kakutani associé à A et à λ . Soit J une sous-algèbre booléenne de E , Z l'espace de Kakutani associé à J et à la mesure restriction de μ à J ; soit ν la mesure correspondante sur Z . On peut alors définir une application continue π de Y sur Z et, pour chaque $z \in Z$, une mesure μ^z sur l'ensemble compact $\pi^{-1}(z)$ telles que, pour tout ensemble U ouvert et fermé dans Y , on ait $\mu(U) = \int \mu^z(U \cap \pi^{-1}(z)) d\nu(z)$. Ce théorème est équivalent à un théorème du Réf. [ce Zbl. **30**, 160]; l'Au. en donne une démonstration directe, alors que le Réf. le déduit d'une généralisation du théorème de Lebesgue-Nikodym.

J. Dieudonné (Nancy).

Geometrie.

Elementargeometrie:

Tietze, Heinrich: Zur Analyse der Lineal- und Zirkel-Konstruktionen. I. *S.-B. math.-naturw. Abt. Bayer. Akad. Wiss. München* **1944**, 209—231 (1947).

Von den Fundamentalkonstruktionen mit Zirkel und Lineal ist das Schneiden eines Kreises mit einer Geraden oder einem Kreis zweideutig. Trotzdem kann eine Kette von Fundamentalkonstruktionen, auch wenn diese zweideutigen vorkommen, zu einem eindeutigen Ergebnis führen; ein Beispiel ist die übliche Konstruktion des Mittelpunkts einer Strecke. In *S.-B. Akad. Wiss. Wien, math.-naturw. Kl. IIa* **118**, 735—757 (1909) hat Verf. bemerkt, daß das klassische algebraische Kriterium für die Konstruierbarkeit mit Zirkel und Lineal bei der üblichen Fassung der Fundamentalkonstruktionen nur gilt, wenn man die Eindeutigkeit des Konstruktionsergebnisses nicht verlangt, und daß „mit Zirkel und Lineal eindeutig konstruierbar“ nur die Punkte sind, die aus den gegebenen bereits mit Hilfe des rechten Zeichenwinkels konstruierbar sind, also nur solche, deren Koordinaten von denen der gegebenen in gewisser Weise rational abhängen. Dem algebraischen Kriterium für die Konstruierbarkeit mit dem rechten Zeichenwinkel hat Verf. dann in *Math. Z.* **46**, 190—203 (1940; dies. Zbl. **23**, 155) eine elegante allgemeine Form gegeben. In der vorliegenden Arbeit nimmt er zu den üblichen Fundamentalkonstruktionen mit Zirkel und Lineal explizit die Anordnung als Konstruktionsmittel hinzu, indem er die Feststellung einer bestimmten Anordnungsbeziehung als zusätzliche Fundamentalkonstruktion einführt. Das Schneiden eines Kreises mit einer Geraden oder einem Kreis kann dann durch nachträgliche Anwendung dieser Fundamentalkonstruktion eindeutig gemacht werden. Für die (eindeutige) Konstruierbarkeit werden Kriterien ausgesprochen, die im wesentlichen besagen, daß für die Konstruierbarkeit mit Zirkel, Lineal und Feststellung von Anordnungsbeziehungen die klassische algebraische Bedingung, dagegen für die Konstruierbarkeit mit Zirkel und Lineal schlechthin die a. a. O. für die Konstruierbarkeit mit dem rechten Zeichenwinkel angegebene algebraische Bedingung notwendig und hinreichend ist.

Bachmann (Kiel).

Cellitti, Carlo: Il teorema di Menelao con qualche notevole applicazione nell'ambito della geometria elementare. *Periodico Mat.*, IV. s. **26**, 106—112 (1948).

Verf. gibt einen elementaren Beweis des bekannten Satzes von Menelaos, der auf der Tatsache beruht, daß die Inhalte von Dreiecken mit einem gleichen (oder supplementären) Winkel den Produkten der diesen Winkel einschließenden

Seiten proportional sind. Auf diese Eigenschaft zurückzugehen, bedeutet nicht notwendig einen wirklichen Vorteil gegenüber dem gewöhnlichen Beweis, der den Satz von Thales offen benutzt. — Aus dem Satz des Menelaos wird dann der Satz von Simson abgeleitet, der besagt, daß die Fußpunkte der von einem Punkte des Umkreises auf die Seiten eines Dreiecks gefällt Lote auf einer Geraden liegen. Die (auf verschiedene Arten bestätigte) Bemerkung, daß auf diesem Kreis der Schnittpunkt des Mittellots einer Seite mit der Halbierenden des gegenüberliegenden Winkels liegt, führt zu einer eleganten Lösung der Aufgabe, ein Dreieck zu konstruieren, von dem die Längen der von demselben Eckpunkt ausgehenden Höhe, Winkelhalbierenden und Mittellinie gegeben sind. *Campedelli* (Florenz).

Hadwiger, H.: Bemerkung zur elementaren Inhaltslehre des Raumes. *Elemente Math.*, Basel 4, 3—7 (1949).

M. Dehn hat auf Veranlassung von D. Hilbert 1901 die Gaußsche Vermutung, exakt bewiesen, daß Tetraeder gleicher Grundfläche und gleicher Höhe existieren, die nicht in endlich viele kongruente Teiltetraeder zerlegt werden können. Die elementare Lehre der Polyederinhalte ist also nicht ohne Grenzverfahren durchführbar. Man kann allerdings, wie es z. B. S. O. Schatunowski 1903 getan hat, $I(T) = Fh/3$ als Inhaltsmaßzahl eines Tetraeders T mit der Grundfläche F und der Höhe h postulieren und von da aus zu einer elementaren Inhaltslehre für Polyeder gelangen. Dabei bleibt aber ungewiß, ob dies das einzig mögliche elementare Inhaltssystem ist und ob die nach diesem Verfahren gefundene Inhaltsmaßzahl für alle Polyeder mit dem Inhalt nach der klassischen Euklidischen Inhaltslehre übereinstimmt. Diese Bedenken widerlegt Verf. durch folgenden Nachweis: Definiert man als Inhalt eines Polyeders P ein eindeutig erklärtes reelles Funktional $I(P)$, das den vier Postulaten genügt: I. $I(P) \geq 0$; II. $I(P + Q) = I(P) + I(Q)$, falls P und Q keine inneren Punkte gemein haben; III. $I(P) = I(Q)$, falls $P \cong Q$; IV. $I(E) = 1$ für den Einheitswürfel E , so gilt für das Tetraeder $T(F, h)$ die Formel $I(T) = Fh/3$. Bei dem Beweis wird die Lösung $r(z) = pz$ (p konstant) der Cauchy'schen Funktionalgleichung $r(x + y) = r(x) + r(y)$ gebraucht. In der exakten Begründung dieser Lösung steckt, wie Verf. bemerkt, der nach Dehn unvermeidliche Grenzprozeß. *Zacharias* (Quedlinburg).

Sydler, J.-P.: Quelques considérations sur les sphères. *Elemente Math.*, Basel 4, 1—3 (1949).

Verf. nennt eine Folge von Kugeln eine orthogonale Kette, wenn jede Kugel zur folgenden orthogonal ist. Er sagt, eine Kette variiert, wenn die Mittelpunkte festbleiben und die Radien unter Bewahrung der Orthogonalität variieren. Dabei bleiben die Potenzebenen der ungeraden Kettenglieder fest. Unter andern ergibt sich die Lösung der von Longhi in *Elemente Math.*, Basel 3, Nr. 2 gestellten Aufgabe 32: Gegeben die Punkte P_2, P'_2, P''_2, P'''_2 und die Kugeln 3, 3', 3'', 3'''. Man soll durch P_2, \dots, P'''_2 Ebenen a, a', a'', a''' legen, die 3, \dots , 3''' in Kreisen einer Kugel 1 schneiden. Die gesuchte Kugel ist die Orthogonalkugel der Kugeln 2, 2', 2'', 2''' um P_2, \dots, P'''_2 , die zu 3, \dots , 3''' orthogonal sind. Weiter ergibt sich: Sind die Punkte $P_2, \dots, P'_2, P_3, \dots, P'_3$ gegeben, so gibt es genau eine Kugel 1 und ein System von Kugeln 2, \dots , 2'', 3, \dots , 3''' um P_2, \dots, P'_3 derart, daß 2 und 3, \dots , 2''' orthogonal sind und 2, \dots , 3''' zu 1 orthogonal sind. Die Potenzebenen a, \dots, a''' von 1 und 3, \dots , 3''' gehen durch P_2, \dots, P'_2 . Die Potenzebenen b, \dots, b''' von 1 und 2, \dots , 2''' gehen durch P_3, \dots, P'_3 . Sei O der Mittelpunkt der Kugel $P_2 P'_2 P''_2 P'''_2$, O' der der Kugel $P_3 P'_3 P''_3 P'''_3$. Die Ebenen b, \dots, b''' berühren eine Drehquadrik mit Brennpunkt P und Achse PO , die Ebenen a, \dots, a''' eine Drehquadrik mit Brennpunkt P und Achse PO' . Weitere Sätze bringen Anwendungen auf Tetraeder und Sonderfälle, wenn die Kugelmittelpunkte in einer Ebene oder einer Geraden liegen. *Zacharias* (Quedlinburg).

Algebraische Geometrie:

Waerden, B. L. van der: Birationale Transformation von linearen Scharen auf algebraischen Mannigfaltigkeiten. *Math. Z.* **51**, 502—523 (1948).

Mit Hilfe des Bewertungsbegriffes wird die Theorie der linearen Scharen auf algebraischen Mannigfaltigkeiten allgemein begründet. Es wird definiert: ein Primdivisor eines n -dimensionalen Funktionenkörpers ist eine solche Bewertung dieses Körpers, in welcher die Konstanten den Wert Null haben und deren Restklassenring den Transzendenzgrad $n - 1$ hat. Ist eine singularitätenfreie Mannigfaltigkeit M gegeben, so bestimmt jede Bewertung des zugehörigen Funktionenkörpers eine irreduzible Nullmannigfaltigkeit auf M . Ist diese von der Dimension $n - 1$, so handelt es sich um einen höheren Primdivisor. Jede irreduzible Mannigfaltigkeit m auf M bestimmt eine Bewertung und zwar genau eine, wenn m $(n - 1)$ -dimensional ist. Höhere Primdivisoren können multiplikativ zu (höheren) Divisoren zusammengefaßt werden. Ist w eine beliebige Bewertung, so ist für jeden ganzen Divisor \mathfrak{A} $w(\mathfrak{A})$ so zu verstehen: Auf der Nullmannigfaltigkeit N von w wird ein beliebiger Punkt P_0 und nach Severi eine Hyperfläche $f = 0$ gewählt, die aus M den Höchstteil $\mathfrak{A} \mathfrak{B}$ ausschneidet, wo \mathfrak{B} den Punkt P_0 nicht enthält. Die Festsetzung $w(\mathfrak{A}) = w(f)$ ist dann unabhängig von der Auswahl von f . Auch für gebrochene Divisoren \mathfrak{D} kann $w(\mathfrak{D})$ erklärt werden. Eine lineare Schar \mathfrak{S} auf M entsteht aus den Divisoren einer linearen Funktionenschar $\varphi = \sum \lambda_i \varphi_i$ durch Multiplikation mit einem beliebigen festen, sie alle ganz machenden Divisor. Ist \mathfrak{p} eine beliebige Bewertung, so heißt das Minimum $e(\mathfrak{p})$ aller $w(\mathfrak{D})$ (für \mathfrak{D} aus \mathfrak{S}) der effektive Wert der Schar in \mathfrak{p} . Für endlich viele niedere Primdivisoren $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \dots, \mathfrak{p}_s$ seien ganze Zahlen $v(\mathfrak{p}_i)$ gegeben. Haben alle die Bedingung $w_{\mathfrak{p}_i}(\mathfrak{A}) \geq v(\mathfrak{p}_i)$ erfüllenden ganzen Divisoren \mathfrak{A} einen Wert $w_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{A}) \geq v(\mathfrak{p})$ und wird hierbei das Gleichheitszeichen einmal erreicht, so heißt $v(\mathfrak{p})$ ein virtueller (Folge)-Wert der $v(\mathfrak{p}_i)$. Eine lineare Schar erfülle die Forderung $w_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{A}) \geq v(\mathfrak{p})$ für ein System von virtuellen Werten. Die Differenzen $e(\mathfrak{p}) - v(\mathfrak{p})$ sind dann die Überwerte der Schar. Wegen der Birational-Invarianz der Bewertungen gibt die Forderung, daß bei birationalen Transformationen lineare Scharen durch Vermittlung der sie darstellenden Funktionenscharen so abgebildet werden, daß die Überwerte erhalten bleiben, eine eindeutige Abbildungsvorschrift, wenn noch festgesetzt wird, daß für höhere Primdivisoren \mathfrak{p} stets $v(\mathfrak{p}) = 0$ sei. Teilscharen gehen dann in Teilscharen über, Vollscharen in Vollscharen. Multiplikation und Division von linearen Scharen werden erklärt und jede Vollschar als Quotient von zwei Vollscharen ohne Überwerte nachgewiesen. Der Begriff virtuelle Vollschar ist birational invariant und dient nach italienischem Vorbild zur Herstellung von Invarianten. Auch ein anderes auf invariante Tensoren gegründetes Verfahren der Bildung von Invarianten wird erklärt. Wichtiges Hilfsmittel bei den Beweisen ist der Satz: Wenn ein Punkt P einer singularitätenfreien Mannigfaltigkeit M nicht auf der Polmannigfaltigkeit von f/g liegt, so kann das Polynom g so gewählt werden, daß es in P nicht 0 wird.

Kähler (Leipzig).

Jones, R. R.: Some properties of a certain double surface in space of four dimensions. *Proc. London math. Soc.*, II. s. **50**, 380—389 (1948).

Nello spazio a quattro dimensioni, consideriamo la totalità triplamente infinita delle quartiche razionali normali che passano per sei punti genericamente scelti, A_1, A_2, \dots, A_6 : indichiamola con (q) . Le ∞^2 curve di (q) che incontrano un piano generico assegnato, p , riempiono una varietà a tre dimensioni, V : scopo dell'A. è lo studio della V , con particolare riguardo alla superficie doppia S che essa possiede. — La V è dell'ordine nove: per essa i punti A_i ($i = 1, 2, \dots, 6$) sono sestupli, mentre le rette che li congiungono a due a due risultano triple. La V passa semplicemente per p e per i piani determinati dai punti A_i presi a tre a tre. Fra le curve di (q) ne

esiste una trisecante p la quale è tripla per la V . — Conviene fermare l'attenzione anche sulla superficie F^9 luogo delle curve di (q) incidenti ad una retta, l : la F^9 è del nono ordine e presenta la molteplicità quattro in ciascuno dei punti A_i . Se la l viene scelta sopra p , si ottengono ∞^2 superficie F^9 appartenenti alla V . — Lo studio della V e della F^9 è fatto dall'A. attraverso certe loro rappresentazioni nello spazio ordinario e, rispettivamente, nel piano. Per questa via si determinano anche altre particolari superficie giacenti sulla V , e si giunge a provare che la F possiede una superficie doppia S . Essa risulta definita come il luogo della semplice infinità delle quartiche di (q) che bisecano il piano p , ed è del diciassettesimo ordine. — Nella accennata rappresentazione piana di una F^9 vengono messe in evidenza sei rette che provengono dai punti A_i : quando esse risultano tangenti ad una medesima conica nasce una F^3 di tipo particolare, che l'A. indica con il simbolo F_L^3 . La considerazione di questa offre interesse, poichè, fra le ∞^1 superficie F^9 che passano per una quartica generatrice della V , si trovano sempre quattro F_L^3 : ed anzi le loro curve doppie riempiono la S . — L'esame della S è ulteriormente approfondito: l'A. precisa, tra l'altro, che per essa i punti A_i , sestupli per la V , sono invece di molteplicità sette; aggiunge che la S passa semplicemente per le rette che congiungono quei punti a due a due, e che essa taglia p lungo una curva del sesto ordine con tre punti doppi. — Dopo altre osservazioni ed applicazioni, l'ampio studio termina con la rappresentazione che della V si può ottenere quando le curve di (q) si riguardino come punti di una varietà del Segre. — La ricerca è strettamente collegata ad altre, precedenti (1943), del Bronowski e dello stesso Jones, delle quali conserva anche le notazioni, e all'interesse dei risultati aggiunge quello di una sagace trattazione.

Campedelli (Firenze).

Jongmans, F. et L. Nollet: Un théorème sur les systèmes linéaires de courbes algébriques planes à système adjoint réductible. Acad. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. s. 34, 617—625 (1948).

Sia $|C|$ un sistema lineare irriducibile di curve piane, il quale abbia la dimensione r e il genere p : indichiamo con $|C'|$ il suo sistema aggiunto puro d'indice uno. Fino dal 1891, nelle sue ormai classiche „Ricerche generali sopra i sistemi lineari di curve piane“ [Mem. Accad. Sci. Torino, II. s. 42, 3—43 (1892)] G. Castelnuovo — dopo avere avvertito che, se $|C'|$ è composto con un fascio di curve E , queste bisecano le C , le quali risultano così iperellittiche — ha fatto l'osservazione che, nell'ipotesi $r > p + 1$, le E sono razionali. — Più tardi (1897) il Wiman ha ritenuto di poter affermare la validità di questo risultato in ogni caso, senza alcuna condizione restrittiva: egli però non ha dato del suo asserto una prova esauriente, poichè si è limitato, più che altro, a rimandare a precedenti ricerche di S. Kantor (1895). Così la questione appare non completamente precisata. — Di recente essa è stata ripresa in esame da L. Nollet [„Recherches sur les systèmes linéaires de courbes algébriques planes“, Mém. Soc. Sci. Liège 7, 469—554 (1947)] che ha mostrato come per il genere p' della E valga la limitazione $p' \leq 2$. Inoltre ha aggiunto che $p' = 2$ può aversi solo se $|C|$ si riduce ad un fascio di curve iperellittiche (soddisfacenti a certe ulteriori ipotesi), e che il caso $p' = 1$, se è possibile, s'incontra soltanto quando $|C|$ appartenga a taluni tipi particolari, che vengono classificati in quattro famiglie. Però l'effettiva esistenza di queste non risulta provata, e ne nasce quindi un nuovo problema che lo stesso Nollet affronta ora con la collaborazione di F. Jongmans. La conclusione a cui essi giungono è negativa, restando così esclusa la possibilità che si abbia $p' = 1$. — Il risultato consente agli A.A. di precisare talune leggi dell'aggiunzione. Se l'aggiunto $|C'|$ di un sistema $|C|$ — almeno doppiamente infinito ($r \geq 2$) — non è irriducibile, esso è certamente composto per mezzo di un fascio di curve razionali ($p' = 0$). Inoltre si ha che, nella serie dei successivi aggiunti di un sistema $|C|$, di dimensione $r \geq 1$, solo il primo e l'ultimo possono essere riducibili: se lo è il primo risulta $r = 1$ e le E sono di genere $p' = 2$. Quando

invece è l'ultimo aggiunto che si spezza, le E sono ancora razionali ($p' = 0$). Qualora infine esista un solo sistema aggiunto e questo sia composto con il fascio $|E|$, si cade nuovamente in $p' = 0$. — Gli AA. passano poi allo studio del sistema, $|D|$, penultimo aggiunto di $|C|$, e danno la classificazione dei vari casi possibili. Tra l'altro, precisano anche che, quando $|D|$ è un fascio, lo stesso accade di $|C|$ ($r = 1$), e che, se $|C| \neq |D|$, le C sono del genere due. — Terminano con complementi ed osservazioni varie, portando le conseguenze della loro ricerca fino alla dimostrazione di un noto teorema di Kantor-Wiman.

Campedelli (Firenze).

Jongmans, F.: Les générations d'une surface algébrique au moyen de deux réseaux réciproques de surfaces. Acad. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. s. 34, 754—762 (1948).

Date due reti di superficie (sistemi lineari ∞^2), $|F_p|$ ed $|F_q|$, è noto che esse si dicono fra loro „reciproche“ quando esiste una corrispondenza biunivoca algebrica fra le superficie dell'una e i fasci di superficie dell'altra. Una F_p e la curva base del fascio che le corrisponde nella $|F_q|$ hanno in comune un certo gruppo di punti, il quale, al variare della F_p , descrive una superficie F_n , di ordine $n = p + q$. Nasce allora la questione inversa — analoga ad altra, ormai classica, relativa alla generazione delle curve piane mediante fasci proiettivi di curve (Chasles, de Jonquières, Cremona, ecc.) — cioè la domanda se una generica superficie, F_n , possa sempre essere generata nel modo predetto mediante reti reciproche. Il problema, affrontato inizialmente dal Reye (1870), è stato ripreso poco più tardi (1877) dall'Escherich, che ha risposto affermativamente per $p \leq 7$ ($q = n - p \geq p$), ed anche per $p = 8$ con $n = 16$ ($p = q = 8$); e che ha invece asserito, per ogni altro caso, l'impossibilità di quella generazione. — Il Jongmans avverte ora che il ragionamento dell'Escherich — basato in gran parte sopra computi di costanti — si presta a talune obiezioni, e studia nuovamente la questione pervenendo a ulteriori precisazioni dei risultati. Egli prova anzitutto che la richiesta generazione della F_n è certamente possibile quando è $p \leq 3$, oppure $p \leq 7$ ed $n \geq 4p - 3$; mentre risulta impossibile per $p > 7$, fatta eccezione per $p = 8$ con $n = 16$. I rimanenti casi rimangono dubbi. — Nelle ipotesi per le quali la risposta è positiva, l'A. determina anche l'ordine di infinità del numero dei gruppi di p^3 punti, esistenti sopra la F_n , che costituiscono la base per una rete di F_p ; e valuta poi quanti di tali punti possono essere scelti ad arbitrio. — La trattazione si basa prevalentemente su considerazioni di carattere numerativo ed aritmetico.

Campedelli (Firenze).

Orgeval, B. d': La propriété caractéristique des surfaces réglées. Acad. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. s. 34, 772—778 (1948).

Lo studio delle superficie algebriche, sulle quali esiste un sistema lineare di curve di cui il grado n e il genere p sono legati dalla relazione $n > 2p - 2$, è stato intrapreso da F. Enriques e G. Castelnuovo fino dal 1901, ed ha portato a dare di esse una completa caratterizzazione, poichè risultano birazionalmente identiche a delle rigate. Qualche ulteriore osservazione e l'esame di casi limite sono stati fatti più recentemente da altri (Campedelli, Pedoe, ecc.). — L'A. torna a stabilire il teorema dell'Enriques e del Castelnuovo per una nuova via, che, pur svolgendosi in un campo molto elevato, presenta una notevole semplicità ed offre interesse per il modo con cui vengono introdotti il genere di una curva e l'irregolarità di una superficie. Ne nasce una trattazione suggestiva la cui importanza sembra possa andar oltre lo scopo immediato che l'A. si prefigge. — Si comincia con l'osservare che i gruppi di n punti (con $n \geq p + 1$) d'una curva C , del genere p , si rappresentano mediante una varietà, V_n , che è il prodotto topologico della varietà dello Jacobi, J_p , relativa alla C , per un S_{n-p} omeomorfo a uno spazio proiettivo. Ad una conclusione analoga porta allora l'esame della varietà V_R , a R dimensioni, immagine delle curve di un sistema continuo $\{C\}$, di genere p e di grado n , dato sopra una superficie

algebraica, F . I sistemi lineari contenuti in $\{C\}$ danno luogo a varietà situate sulla V_R e che sono omeomorfe a spazi proiettivi S_r ; ciò che, come l'A. dice, porta ad una specie di struttura a fibre della V_R . Ne segue la possibilità di definire una varietà, W_q , quoziente della V_R per un S_r . Il numero $q = R - r$ costituisce l'irregolarità della F , e di esso viene dimostrata direttamente l'indipendenza dalla scelta del sistema iniziale $\{C\}$. — Nell'ipotesi $n > 2p - 2$ la W_q risulta contenuta nella J_p relativa alla generica curva C di $\{C\}$, e da ciò l'A. deduce l'esistenza sulla F di un sistema di curve razionali, che posseggono una unisecante di genere q . E' appunto questa la conclusione che si attendeva: la F appare birazionalmente identica ad una rigata del genere q .
Campedelli (Firenze).

Differentialgeometrie in Euklidischen Räumen:

Lips, L.: Zwei Fälle, wo zwischen einer Raumkurve und der Rückkehrkurve ihrer Polfläche eine eindeutige Beziehung besteht. Simon Stevin, wis. natuurk. Tijdschr. 26, 104—128 (1948/49) [Holländisch].

Es handelt sich um die Raumkurven mit den natürlichen Gleichungen

$$(A) \quad \varrho = \tau = c\sqrt{s}, \quad c = \text{konst.}; \quad (B) \quad \varrho = \tau = s,$$

wobei $1/\varrho$ die Krümmung, $1/\tau$ die Windung darstellt. — Der Ort der Mittelpunkte der Schmiegekugeln ist bei (A) zur Kurve K selbst kongruent; bei (B) zu ihr ähnlich. In jedem Fall kann man die Kurve in eine nach beiden Seiten unendlich fortlaufende Folge K_i von Raumkurven einbauen, von der jede aus den Mittelpunkt der Schmiegekugeln der vorangehenden besteht. Ihre gegenseitige Lage, sowie die Eigenschaften der Kurven selbst werden untersucht. Die Kurve (B) gestattet eine eingliedrige Gruppe von Ähnlichkeiten, daher sind auch hier sämtliche Kurven der Folge kongruent, aber nicht kongruent aufeinander bezogen. *Bol (Freiburg).*

Volta, Vittorio dalla: Sull'isometria di calotte superficiali. Atti Accad. naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. fisic. mat. natur., VIII. s. 5, 381—384 (1948).

Stellt $\chi(u, v)$ eine Fläche im Euklidischen R_3 dar, so bestimmen die Ableitungen an fester Stelle (u_0, v_0) des Vektors χ nach u und v bis zu den k -ten einschließlich eine „Flächenhaube“ k -ter Ordnung. Sind zwei Flächen $\chi(u, v)$ und $\tilde{\chi}(u, v)$ durch gleiche Parameter eineindeutig auf einander bezogen, so spricht man von einer Isometrie der Flächenhauben k -ter Ordnung an der Stelle (u_0, v_0) , wenn dort die Koeffizienten E, F, G der ersten Grundformen beider Flächen bis zu den Ableitungen $(k-1)$ -ter Ordnung einschließlich übereinstimmen. — In Verallgemeinerung eines Ergebnisses von E. Bompiani zeigt der Verf., daß sich zwei Flächenhauben 4-ter Ordnung dann und nur dann isometrisch aufeinander beziehen lassen, wenn an den fraglichen Stellen beider Flächen die Gaußschen Krümmungen sowie ihre Ableitungen mit Hilfe der ersten Beltramischen Differentialoperators übereinstimmen. Eine Isometrie zwischen zwei Flächenhauben k -ter Ordnung ($k \geq 4$) läßt sich dann und nur dann (durch geeignete Abwandlung der eineindeutigen Abbildung) in eine Isometrie der nächsthöheren Ordnung verwandeln, wenn auf beiden Flächen die partiellen Ableitungen von K nach u und v bis zu $(k-2)$ -ten Ordnung einschließlich übereinstimmen.
Bol (Freiburg).

Efimov, N. V.: Untersuchung der Deformation einer Fläche, die einen Punkt mit dem Werte Null der Gausschen Krümmung enthält. Mat. Sbornik, II. s. 23, 89—125 (1948) [Russisch].

Im ersten Teil ist der Punkt ein isolierter Punkt mit der Krümmung Null; in seiner Umgebung ist die Krümmung negativ. Bezeichnet man mit m die Zahl der Blätter des sphärischen Bildes der Umgebung, so heißt $-m$ Index des Punktes, $n = m + 1$ Sattelordnung ($m = 2$, $n = 3$ Affensattel). Cohn-Vossen scheint nach einer Bemerkung des Verf. die ersten Sätze über die Verbiegung solcher Flächenstücke gehabt zu haben (1935). Es handelt sich immer um Verbiegung im Kleinen.

Das Interesse für derartige Flächenstücke rührt daher, daß die durch „Voß vorgeschlagene, anfangs wohl begründete Unterscheidung zwischen Isometrie und (stetiger) Verbiegbarkeit“, [Bianchi-Lukat, 2. Aufl., S. 178] die durch Ergebnisse von E. E. Levi (1908) in weitem Umfang als unberechtigt erkannt war, für diese besonderen Flächen sehr wohl aufrecht erhalten werden muß. [Hopf-Schilt, dies. Zbl. 19, 280]. Sätze von Schilt werden verschärft; an die Verbiegung wird in leicht verständlicher Bezeichnung meist nur die Forderung der „gleichmäßigen Glattheit“ gestellt. Eine wichtige Rolle spielt der Satz von der Erhaltung des Index bei Deformationen (nicht nur Verbiegungen), bei denen das Vorzeichen der Krümmung in der Umgebung des parabolischen Punktes erhalten bleibt. Verf. liefert zu dem Problemkreis einen interessanten Beitrag: Es gibt beliebig kleine Flächenstücke, die keine gleichmäßig glatte Verbiegung zulassen. Unter den Flächen $x = u + R^{(2)}(u, v)$, $y = v + S^{(2)}(u, v)$, $z = f^{(9)}(u, v) + T^{(10)}(u, v)$, wo f, R, S, T homogen von den angegebenen Ordnungen und R, S, T sonst beliebig sind, soll es Flächen mit dieser Eigenschaft geben; f muß in reelle, voneinander verschiedene Linearfaktoren zerlegbar sein und noch gewisse Forderungen erfüllen, für deren genaue Präzisierung Verf. sich leider auf frühere, dem Ref. unzugängliche Arbeiten beruft. — Im zweiten Teil werden auch Flächenstücke betrachtet, bei denen der Punkt, dessen Umgebung untersucht wird, auf einer oder mehreren parabolischen Kurven gelegen ist. Das interessanteste Ergebnis ist folgendes: Es gibt analytische Flächen, die in der Umgebung eines solchen Punktes den Charakter einer konvexen Fläche haben, insofern sie ganz auf der einen Seite der Tangentialebene des Punktes liegen, mit der sie in dieser Umgebung keinen Punkt gemeinsam haben, aber sich in eine Fläche verbiegen lassen, die die Tangentialebene durchsetzt. (Hier bleibt also der Index nicht erhalten.) Dazu betrachtet Verf. das Linienelement $ds^2 = du^2 + Gdv^2$, $G = 1 + u^3v$ und bestimmt die z -Koordinaten zweier Flächen dieser Metrik mit den Anfangsbedingungen $z(0, v) = \frac{1}{2}v^2$; $z_u(0, v) = v$ bzw. $z(0, v) = \frac{1}{2}v^2$, $z_u(0, v) = -v$. Das führt zu den Entwicklungen $z = \frac{1}{2}(u + v)^2 - \frac{1}{4}(u^4 + 2u^3v) + \dots$ bzw. $z = \frac{1}{2}(u - v)^2 - \frac{1}{4}(-u^4 + 2u^3v) + \dots$, welche die angegebene Eigenschaft verdeutlichen. Daß die Flächen stetig ineinander verbiegbar sind, folgt aus dem „Satz über den Zusammenhang“: Damit „Zusammenhang“ der isometrischen Flächen (mit angebbarem Index) bestche, ist notwendig und hinreichend, daß durch den Punkt der Krümmung Null nicht mehr als eine singuläre Geodätische gehe, d. i. eine Geodätische, längs deren die Ableitungen der Gaußschen Krümmung beide verschwinden: $\partial K / \partial u = \partial K / \partial v = 0$. Dabei heißt die Menge der isometrischen Flächen zusammenhängend, wenn sich jede in jede andere oder in deren Spiegelbild stetig verbiegen läßt.

Rembs (Berlin).

Differentialgeometrie besonderer Liescher Gruppen:

Bompiani, E.: Fasci di elementi differenziali nel piano proiettivo. Rend. Mat. sue Appl., Univ. Roma Ist. naz. alta Mat., V. s. 7, 124—168 (1948).

Die Arbeit hat die Charakterisierung der Systeme von $\infty^1 E_3$ (differentiellen Linienelementen 3. Ordnung) mit gegebenem Zentrum O , die zu Büscheln von ebenen algebraischen Kurven gehören, zum Ziel; sie werden E_3 -Büschel mit dem Zentrum O genannt. — Verf. löst zunächst das entsprechende Problem für $\infty^1 E_2$ mit dem Zentrum O und schließt, daß diese, wenn sie eine feste Tangente haben, immer ein Büschel bilden (insofern als sie zu ∞^2 Büscheln von Kegelschnitten gehören), während $\infty^1 E_2$ mit variabler Tangente nur dann zu einem Büschel algebraischer Kurven gehören, wenn sie zu einem Kegelschnittbüschel gehören (und dann zu ∞^2). — Geht man zu einem System von $\infty^1 E_3$ mit gegebenem Zentrum O über, so ergibt sich, daß diese, wenn sie ein E_2 gemeinsam haben, immer ein Büschel bilden, während sie, wenn sie nur die Tangente gemeinsam haben, nur dann zu einem Büschel algebraischer Kurven gehören, wenn sie zu einem Kegelschnitt-

büschel gehören (und dann zu ∞^2). Wenn schließlich die E_3 mit dem Zentrum O veränderliche Tangente haben, so bilden sie nur dann ein Büschel, wenn sie zu einem Büschel von Kurven 3. Ordnung gehören; diese brauchen nicht rational zu sein, und daher stellt sich Verf. die Aufgabe, ein Büschel von rationalen Kurven kleinster Ordnung, das das gegebene E_3 -Büschel enthält, zu bestimmen. Um diese Aufgabe zu lösen, unterscheidet Verf. zunächst 3 Fälle, je nachdem die Geraden der Inflexionselemente, die dem gegebenen E_3 -Büschel angehören, alle drei verschieden sind oder zwei von ihnen oder schließlich alle drei zusammenfallen. Jeder dieser Fälle wird dann weiter in verschiedene Unterfälle unterteilt, je nachdem, ob keine, eine oder mehrere von den Inflexionselementen Hyperinflexionselemente sind. — Verf. wird so zur Untersuchung von 15 Typen geführt, von denen nur einige aus projektiv äquivalenten E_3 -Büscheln bestehen, während die anderen projektive Invarianten besitzen. Für jeden dieser Typen bestimmt Verf. durch eine genaue Analyse ein Büschel von rationalen Kurven (kleinster Ordnung), das das E_3 -Büschel enthält; diese sind je nach dem Fall Kegelschnitte, Kurven 3. Ordnung mit Doppelpunkt oder rationale Kurven 4. Ordnung.

P. Buzano (Turin).

Salini, Ugo: *Sulle trasformazioni puntuali fra due spazi ordinari in una coppia ad jacobiano nullo di caratteristica uno.* Rend. Mat. sue Appl., Univ. Roma Ist. naz. alta Mat., V. s. 7, 44—71 (1948).

Sangermano, Cosimo: *Sulle trasformazioni puntuali fra due spazi ordinari.* Boll. Un. mat. Ital., III. s. 3, 119—124 (1948).

Referent hat [Boll. Un. mat. Ital., III. s. 2, 95—103 (1947)] die Punkttransformationen zweier linearer Räume S_3 in der Umgebung 2. Ordnung eines Paares von entsprechenden Punkten mit verschwindender Funktionaldeterminante untersucht, unter besonderer Berücksichtigung des Falles, daß der Rang der Funktionaldeterminante 2 ist. Verff. setzen diese Untersuchung fort für den Fall, daß der Rang 1 ist, indem sie verschiedene geometrische Gebilde einführen, die mit der Umgebung zweiter Ordnung der Transformation in dem betrachteten Punktepaar verknüpft sind.

Mario Villa (Bologna).

Villa, Mario: *Sulle trasformazioni puntuali in una coppia a Jacobiano nullo.* Boll. Un. mat. Ital., III. s. 2, 3—8 (1947).

In einer früheren Arbeit [dies. Zbl. 29, 314] hat Verf. bewiesen, daß eine Punkttransformation T zwischen zwei Ebenen nur dann durch Cremonatransformationen bis zur Umgebung zweiter Ordnung eines Paares (O, O') mit der Funktionaldeterminante Null approximiert werden kann, wenn das stationäre Element 1. Ordnung E_1 mit dem Zentrum O zur Jacobischen Kurve gehört. Er bemerkt nun, daß jedem Element 2. Ordnung mit dem Zentrum O' ein festes E_2 mit dem Zentrum O (das das stationäre E_1 enthält) entspricht: nur wenn das erwähnte Ausnahme- E_2 ein Inflexions- E_2 ist, kann T durch quadratische Transformationen approximiert werden. Verf. beweist, daß unter diesen Bedingungen ∞^3 quadratische Transformationen bestimmt sind, die T bis zu der Umgebung 2. Ordnung approximieren, und benutzt sie dann, um ein intrinsisches projektives Bezugssystem zu bestimmen, in dem T bis zur Umgebung 3. Ordnung durch die kanonischen Gleichungen

$$x' = y + a_{30}x^3 + 3a_{21}x^2y + a_{03}y^3 + [4], \quad y' = xy + a_{30}(x^3 - y^3) + [4]$$

dargestellt wird. Die Ergebnisse werden dann auf den Spezialfall, daß T eine quadratische Transformation ist, angewendet.

P. Buzano (Turin).

Marcus, F.: *Sopra una proprietà caratteristica delle congruenze di rette W .* Atti Accad. naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. fisic. mat. natur., VIII. s. 4, 699—700 (1948).

x sei ein Punkt, der den 1. Brennmanntel einer W -Strahlenkongruenz beschreibt; wenn diese Fläche auf Asymptotenlinien u und v bezogen wird, genügt der Punkt x

bekanntlich dem System

$$x_{uu} = \vartheta_u x_u + \beta x_v + p_{11} x, \quad x_{vv} = \gamma x_u + \vartheta_v x_v + p_{22} x,$$

während der 2. Brennpunkt der Kongruenz \bar{x} einem entsprechenden System mit neuen Koeffizienten $\beta, \gamma, \vartheta, \dots$ genügt. Verf. beweist die charakteristische Beziehung

$$\beta\gamma + \bar{\vartheta}_{uv} = \beta\gamma + \vartheta_{uv}$$

(die von dem Proportionalitätsfaktor der homogenen Koordinaten unabhängig ist) und deutet sie geometrisch als Gleichheit von Doppelverhältnissen. *P. Buzano.*

Riemannsche Mannigfaltigkeiten. Übertragungen:

Wrona, Włodzimierz: On multivectors in a V_n . I. Proc. Akad. Wet. Amsterdam **51**, 1291—1301 (1948).

Verf. definiert im Riemannschen Raum V_n mit Hilfe des Fundamentaltensors $a_{\lambda\mu}$ vom Range n die Affinoren

$$a_{\lambda_1 \dots \lambda_m \mu_1 \dots \mu_m}^m = m! a_{[\lambda_1 [\mu_1 a_{\lambda_2 \mu_2} \dots a_{\lambda_m \mu_m]} \mu_m]; \quad m = 2, 3, \dots, n,$$

der Valenz $2m$. Mit Hilfe dieser Affinoren und des Krümmungsaffinors der V_n werden eine Reihe weiterer Affinoren hergeleitet. Nachdem mittels dieser Affinoren übersichtliche Ausdrücke für die Skalkrümmung von m -Richtungen hergeleitet worden sind, können Kriterien dafür angegeben werden, daß der V_n ein Einstein-scher Raum oder von konstanter Krümmung ist. Es wird ferner ein Satz hergeleitet, aus dem unmittelbar folgender verallgemeinerter Schurscher Satz fließt: Wenn die Skalkrümmung der m -Richtung eines beliebigen Punktes von der m -Richtung unabhängig ist, dann ist sie auch unabhängig vom Ort. *O. Varga (Debrecen).*

Wrona, Włodzimierz: On multivectors in a V_n . II. Proc. Akad. Wet. Amsterdam **51**, 61—68 (1949).

In Fortsetzung der vorangehend referierten Arbeit gibt Verf. ein Kriterium dafür an, daß ein V_n konformeuklidisch ist. Dieses Kriterium verwendet im wesentlichen die Skalkrümmung einer m -Richtung und der dazu absolut orthogonalen $(n-m)$ -Richtung. Auch ein diesbezügliches Haantjessches Kriterium kann mit diesen Hilfsmitteln sehr einfach bewiesen werden. Schließlich führt Verf. sogenannte „Haupt- m -Vektoren“ ein. Wegen der einigermaßen komplizierten Formulierung muß auf die Arbeit verwiesen werden. Mit Hilfe von Eigenschaften der Haupt- m -Vektoren wird eine Klassifizierung der V_n angestrebt. *O. Varga (Debrecen).*

Haimovici, Mendel: Sur les espaces des familles simplement transitives de transformations de variables à courbure de III-e espèce nulle. Bull. Ecole Polytechn. Jassy **2**, 46—70 (1947).

In Verfolgung einer Reihe früherer Arbeiten untersucht Verf. die zu einer einfach transitiven Transformationsschar $X^i = F^i(x^j, a^j)$ ($i, j = 1, 2, \dots, n$) gehörige Geometrie eines $2n$ -dimensionalen Punktraumes mit Koordinaten (X, x) . In einem solchen Raum kann ein affiner Zusammenhang dadurch eingeführt werden, daß durch entsprechende Forderungen zwei zu benachbarten Punkten gehörige $2n$ -Beine aufeinander bezogen werden [vgl. Verf., dies. Zbl. **30**, 372]. Verf. definiert sechs verschiedene affine Zusammenhänge. In der vorliegenden Arbeit wird derjenige Zusammenhang untersucht, den Verf. als von III-ter Art A bezeichnet. Wegen der Definition muß auf die im Druck befindlichen diesbezüglichen Arbeiten des Verf. in den Bull. math. Soc. Roumaine Sci. und Mathematica, Cluj, verwiesen werden. Wesentlich ist dabei die Voraussetzung, daß die zu diesem Zusammenhang gehörige Krümmung Null ist. Daraus folgt, daß in einem geeigneten Koordinatensystem die Übertragungsparameter verschwinden. Hieraus ergibt sich dann, daß in einem ausgezeichneten Koordinatensystem die Transformationsschar in den

X^i, x^i und den Parametern a^i linear ist. Verf. betrachtet schließlich denjenigen Zusammenhang, der von ihm als von III-ter Art B bezeichnet wird, wieder unter der Voraussetzung, daß die Krümmung verschwindet. Dieser Fall wird auf den obigen durch Vertauschung der Veränderlichen x^i mit den Parametern a^i zurückgeführt.

O. Varga (Debrecen).

Rozenfel'd (Rosenfeld), B. A.: Differentialgeometrie der Symmetriegebilde. Doklady Akad. Nauk SSSR, II. s. 59, 1057—1060 (1948) [Russisch].

In verschiedenen Geometrien (euklidischer, projektiver, elliptischer, konformer usw.) gibt es involutorische Transformationen, die je nach der vorliegenden Geometrie lineare Räume, Paare von solchen, Sphären usw. invariant lassen, wofür man den Sammelbegriff „Symmetriegebilde“ einführen kann. Die Gesamtheit der derartigen „Symmetriegebilde“ eines Grundraumes läßt sich nun ihrerseits zu einem Raum mit affinem Zusammenhang zusammenfassen. Mit Hilfe derjenigen Gruppentransformation, die 2 unendlich benachbarte „Symmetriegebilde“ ineinander überführt, werden dabei die lokalen Parameter und Vektoren in dem zu bildenden Raum eingeführt. Die geodätischen Linien sind dabei den eingliedrigen Untergruppen der Fundamentalgruppe des Ausgangsraumes zugeordnet. Weiterhin werden auch „Kongruenzen“ derartiger „Symmetriegebilde“ und hierzu gehörige differentialgeometrische Dinge in Verallgemeinerung bekannter Tatsachen der differentiellen Liniengeometrie eingeführt. Die vorliegende Note ist in ihrer gedrängten Zusammenfassung noch nicht ohne weiteres verständlich; verwiesen ist auf folgende beiden vorherigen Arbeiten desselben Autors [Doklady Akad. Nauk SSSR, II. s. 57, 543 (1947) und dies. Zbl. 29, 167].

Bureau (Hamburg).

Topologie:

● **Vaidyanathaswamy, R.: A treatise on set topology. I.** Madras, S. Mahadevan 1947. VI, 304 p. Rs 16—4.

Das neue Lehrbuch der mengentheoretischen Topologie behandelt in umfassender Weise die durch die folgenden Kapitelüberschriften umrissenen Gebiete: Algebra der Teilmengen einer Menge. Ringe und Körper von Mengen. Algebra der teilweisen Ordnung. Die abgeschlossene Hülle. Die Umgebungs-topologie. Die offenen und abgeschlossenen Mengen. Topologische Abbildungen. Die Ableitung im T_1 -Raum. Das topologische Produkt. Konvergenz in metrischem Raum. Konvergenztopologie. (Die Kapitel sind reichhaltiger, als ihre Überschriften ahnen lassen.) Von den bisherigen Lehrbüchern unterscheidet sich das vorliegende in methodischer Hinsicht, und zwar dadurch, daß Begriff und Theorie der teilweise geordneten Mengen systematisch angewandt wird (dieser Theorie ist ein eigenes Kapitel gewidmet). Insbesondere ist bekanntlich das System aller Topologien, die einer Menge aufgeprägt werden können, teilweise geordnet durch die Relation „schwächer als“. Durch die konsequente Anwendung dieser Betrachtungsweise kommt manche überraschende Formulierung und Rationalisierung der Darstellung zustande. Der Wert des Buches wird noch erhöht durch eine außerordentlich umfangreiche Sammlung von Beispielen und Anwendungen, die teilweise vom Autor selbst herrühren.

Nöbeling (Erlangen).

Lichtenbaum, L. M.: Über Abbildungen der diskreten Räume von Linfield. Mat. Sbornik, II. s. 23, 315—328 (1948) [Russisch].

1. Die diskreten Räume G_* und G^* ergänzen einander zum diskreten Raum G , wenn alle drei die gleiche Basis besitzen und benachbarte Punkte von G entweder in G_* oder G^* , aber nicht in beiden Räumen gleichzeitig benachbart sind. Sind m und n die Dimensionen von G_* bzw. G^* , so gilt: $\dim G < 2^{m+n-1} \cdot 3 - 1$. 2. Die eindeutigen und stetigen Abbildungen eines diskreten Raumes werden von dem Gesichtspunkt aus untersucht, wie sie die Dimension verändern. Es wird eine Klasse von Abbildungen angegeben, welche die Dimension nicht erniedrigen, die Klasse der „entfaltenden“ Abbildungen. Die eindeutige Abbildung $f(G) = G^*$ heißt „entfaltend“ im Punkte a , wenn benachbarte Punkte von a ($\neq a$) auf benachbarte Punkte von $f(a)$, jedoch nicht auf den Punkt $f(a)$, abgebildet werden. Außerdem werden andere Abbildungsklassen untersucht, z. B. die Klasse der „faltenden“

Abbildungen. Die eindeutige und stetige Abbildung $f(G) = G^*$ heißt „faltend“ im Punkte a , wenn die zu $f(a)$ benachbarten Punkte $\neq f(a)$ Urbilder $\neq a$ besitzen, die zu a benachbart sind. Faltende Abbildungen können die Dimension erhöhen oder erniedrigen. — 3. Die bewiesenen Sätze werden auf die Theorie der Streckenkomplexe, die Dimensionstheorie der kompakten, metrischen Räume und die Theorie der eindeutigen stetigen Abbildungen kompakter, metrischer Räume angewandt. Bei den zuletzt genannten Anwendungen handelt es sich um Eigenschaften der Überdeckungen der kompakten, metrischen Räume. Jede endliche Überdeckung bestimmt einen diskreten Raum, dessen Elemente die Überdeckungsmengen sind, wobei zwei Elemente benachbart sind, wenn die ihnen entsprechenden Überdeckungsmengen einen nicht leeren Durchschnitt haben. *Thimm (Bonn).*

Stone, M. H.: On the compactification of topological spaces. *Ann. Soc. Polonaise Math.* **21**, 153—160 (1948).

L'Au. donne des démonstrations simplifiées des principales propriétés du compactifié de Stone-Čech $\beta(X)$ d'un espace complètement régulier X [Stone, *Trans. Amer. math. Soc.* **41**, 375—481 (1937); Čech, *Ann. Math.*, Princeton, II. s. **38**, 823—844 (1937); dies. *Zbl.* **17**, 135, 428]. Comme application intéressante de ces propriétés, il montre comment le théorème de prolongement d'Urysohn pour les espaces normaux peut se ramener au cas particulier des espaces compacts, qui lui-même se démontre aisément à l'aide du théorème de Weierstrass généralisé par l'A. [*Math. Mag.*, Texas **21**, 168, 237 (1948)]. *J. Dieudonné.*

Samuel, P.: On universal mappings and free topological groups. *Bull. Amer. math. Soc.* **54**, 591—598 (1948).

N. Bourbaki [*Éléments de mathématique I. Liv. II. Chap. III. Appendice. Actual sci. industr. Nr. 1044* (1948)] a posé de façon générale le problème des „applications universelles“ et montré comment ce problème intervient dans de nombreuses théories mathématiques, où il admet une solution que l'on trouve par des méthodes particulières à la théorie envisagée. L'A. montre qu'on peut obtenir cette solution par un procédé uniforme toutes les fois que les structures envisagées satisfont à certaines conditions qu'il énumère, et qui reviennent en somme à dire qu'on peut définir les notions de structure induite et de structure produite pour ces structures. Comme application de sa méthode, il retrouve rapidement les résultats de Markoff [*Izvestija Akad. Nauk URSS, Sér. mat.* **9**, 3—64 (1945)] sur les groupes topologiques libres. *J. Dieudonné (Nancy).*

Sierpiński, Waław: Remarque sur les espaces topologiques. *Rev. Ci.*, Lima **50**, 193—196 (1948).

Es seien f und g zwei stetige Funktionen, deren Definitionsbereich D ein metrischer Raum ist und deren Wertebereiche in einem metrischen Raum W enthalten sind. Wenn nun f und g identisch sind auf einer Teilmenge D' von D , die in D dicht ist, so sind f und g in ganz D identisch. Verf. beweist, daß dasselbe gilt, wenn D ein topologischer T_1 -Raum und W ein topologischer, Hausdorffscher Raum ist. *Nöbeling (Erlangen).*

Liao, S. D.: Some theorems on the dimension of fibre spaces. *Amer. J. Math.* **71**, 231—240 (1949).

Es sei X ein gefaserter Raum im Sinne von Hurewicz-Steenrod, B sein Basisraum, π die Projektion von X auf B . Für $b \in B$ ist dann $\pi^{-1}(b)$ die zu b gehörige Faser. Es werden Beziehungen zwischen den Dimensionen von X , B und $\pi^{-1}(b)$ und hinreichende Bedingungen dafür angegeben, daß alle Fasern dieselbe Dimension haben. Der Basisraum B wird immer als Polyeder vorausgesetzt. *H. Seifert (Heidelberg).*

Young, Gail S.: On compact fiberings of the plane. *Bull. Amer. math. Soc.* **53**, 295—298 (1947).

Ist f eine solche offene Abbildung der Ebene auf A , daß für $x, y \in A$ $f^{-1}(x)$ und $f^{-1}(y)$ homöomorph sind und daß die Komponenten von $f^{-1}(x)$ kompakt sind, so zerlegt keine solche Komponente die Ebene, und A ist eine zweidimensionale Mannigfaltigkeit; sind die Urbilder $f^{-1}(x)$ selbst kompakt, so sind sie zusammenhängend, und A ist der Ebene homöomorph. Korollar: Die einzige Faserung der Ebene in kompakte Mengen ist die Faserung in einpunktige Mengen. — f sei eine offene Abbildung einer zweidimensionalen Mannigfaltigkeit auf eine zweidimensionale Mannigfaltigkeit A ; ist jede Komponente von $f^{-1}(x)$, $x \in A$, einpunktig oder eine einfache Kurve, so ist $f^{-1}(x)$ total zusammenhängend. *Specker (Zürich).*

Moise, Edwin E.: An indecomposable plane continuum which is homeomorphic to each of its nondegenerate subcontinua. Trans. Amer. math. Soc. **63**, 581—594 (1948).

Ce travail fournit une réponse à un problème posé par Mazurkiewicz [Fundam. Math., Warszawa **2**, 285, probl. 14 (1921)]: Un continu plan (ou situé dans un R_n) qui est homéomorphe à chacun de ses vrais sous-continus est-il nécessairement un arc simple? L'auteur construit une famille de continus plans indécomposables, topologiquement équivalents entre eux, appelés pseudo-arcs. Ces continus jouissent de la propriété énoncée plus haut, qui ne suffit donc pas à caractériser l'arc simple. Une suite de théorèmes et plusieurs définitions nouvelles conduisent à ce résultat. Le pseudo-arc est défini comme intersection d'une suite décroissante de continus, convenablement définis. Les pseudo-arcs possèdent en commun avec les continus définis par B. Knaster [Fundam. Math., Warszawa **3**, 247—286 (1922)] la propriété d'être indécomposables sans posséder aucun sous-continu décomposable, mais on ignore si les deux classes de continus sont identiques. On se demande encore si les arcs simples et les pseudo-arcs sont les seules solutions du problème de Mazurkiewicz. *Calugareanu (Cluj).*

Whyburn, G. T.: On n -arc connectedness. Trans. Amer. math. Soc. **63**, 452—456 (1948).

Ein vereinfachter Beweis des n -Bogensatzes als Folgerung aus dem zweiten n -Bogensatz [Menger, Kurventheorie, Leipzig und Berlin 1932, S. 219; dies. Zbl. **5**, 415] für im kleinen zusammenhängende separable, vollständige, metrische Räume und aus dem Satz: Ist eine im kleinen zusammenhängende und im kleinen kompakte Menge eines metrischen Raumes n -punktig zusammenhängend zwischen zwei Punkten a und b , so enthält sie eine gleichartige Teilmenge, für die a und b reguläre Punkte sind. Beide Sätze werden durch Induktionsschluß bewiesen.

Künne (Erlangen).

Tutte, W. T.: A ring in graph theory. Proc. Cambridge philos. Soc. **43**, 26—40 (1947).

A sei eine Strecke mit verschiedenen Endpunkten in einem Graphen L . L'_A entstehe aus L durch Entfernung von A , L''_A durch Entfernung von A und Identifizierung der Endpunkte von A . $L_1 \cdot L_2$ sei ein Graph mit den Komponenten L_1 und L_2 . Eine W -Funktion (V -Funktion) ist eine eindeutige Funktion über der Menge aller endlichen Graphen mit Werten in einer abelschen Gruppe G (in einem kommutativen Ring H), welche folgenden Bedingungen 1. und 2. [Bedingungen 1., 2. und 3.] genügt: 1. $W(L_1) = W(L_2)$, wenn L_1 und L_2 homöomorph sind. 2. $W(L) = W(L'_A) + W(L''_A)$ für jede beliebige Strecke A in L mit verschiedenen Endpunkten. 3. $W(L_1 \cdot L_2) = W(L_1) \cdot W(L_2)$. — $W(L) = \text{Anzahl aller Bäume des Graphen } L$ ist ein Beispiel für eine W -Funktion. Beispiele für V -Funktionen erhält man aus Färbungsproblemen von Graphen. — Für eine allgemeine Theorie der W - und V -Funktionen wird ein Ring R konstruiert, so daß jeder Graph L eindeutig einem Element $f(L)$ in R entspricht. Dazu bildet man den Ring B aller endlichen Graphenformen $\sum a_i L_i^*$ (a_i ganz rational), wobei L^* die Klasse aller zu L homöomorphen Graphen ist. In B betrachtet man sogenannte „ W -Formen“ $L^* - (L'_A)^* - (L''_A)^*$

und bildet aus ihnen endliche lineare Aggregate mit ganz-rationalen Koeffizienten. Letztere bilden ein Ideal W in B . R ist nun der Restklassenring B/W , und es zeigt sich, daß jede W -Funktion (V -Funktion) in der Form $hf(L)$ darstellbar ist, wo h ein Homöomorphismus von R , aufgefaßt als additive Gruppe (als Ring) in G (in H) ist. Umgekehrt ist für jeden solchen Homöomorphismus h die Funktion $hf(L)$ eine W - bzw. V -Funktion. Es wird ferner bewiesen, daß R isomorph ist zum Ring aller endlichen Polynome ohne konstanten Term in den unendlich vielen Unbestimmten z_0, z_1, z_2, \dots über dem Ring der ganzen Zahlen. — Weiterhin werden W - und V -Funktionen betrachtet, die invariant sind gegenüber Unterteilungen von Graphen, die also topologische Invarianten des durch einen Graphen dargestellten Komplexes sind. — Eine spezielle V -Funktion wird im Zusammenhang mit einigen Färbungsproblemen behandelt. — Zum Schluß werden „kubische Netzwerke“ untersucht, d. h. Graphen, die nur Knotenpunkte zweiten und dritten Grades enthalten.

Hans Belck (Frankfurt a. M.).

Alexander, J. W.: Gratings and homology theory. Bull. Amer. math. Soc. 53, 201—233 (1947).

Es wird ein neues algebraisches System („grating“) entwickelt, und mit seiner Hilfe werden „Homologieringe“ von topologischen Räumen definiert; weitere Anwendungen des Systems in Topologie, Differentialgeometrie, Potentialtheorie werden in Aussicht gestellt. Ein Gatter (grating) Γ ist eine solche Menge von geordneten Tripeln $\gamma = (a, b, c)$ von Elementen einer gewissen Menge, daß zwei verschiedene Tripel kein gemeinsames Element enthalten; die Tripel heißen Schnitte (cuts), ihre Elemente Elemente von Γ . Eine Zelle A von Γ ist eine Folge z_1, \dots, z_m von Elementen; m heißt ihr Grad, die Anzahl ρ der Elemente z_i , die mittlere Elemente eines Schnittes sind, ihr Rang ($A = A^\rho$), die Zelle a_1, \dots, a_m (a_i erstes Element des zu z_i gehörenden Schnittes) ihr Typus α ($A = A_\alpha$). Die leere Folge ist die Zelle E_\emptyset . Das Produkt der Zellen $A = z_1, \dots, z_m$ und $B = w_1, \dots, w_n$ ist die Zelle $AB = z_1, \dots, z_m, w_1, \dots, w_n$. Für das folgende wird ein Ring $[\lambda]$ (ohne Nullteiler, mit Einselement 1) zugrunde gelegt. Eine Kette vom Typus α ist eine Linearform in den Zellen A_α : $K_\alpha = \sum \lambda_i A_{\alpha_i}$; diese Ketten bilden eine abelsche Gruppe mit dem Nullelement 0_α . Eine Kette K ist darstellbar als $K = \sum K^\rho$, wobei in K^ρ nur Zellen vom Range ρ mit einem Koeffizienten $\neq 0$ auftreten; $K^* = \sum (-1)^\rho K^\rho$. Die Randoperation $'$ wird vorerst für Ketten $1A = A$ induktiv nach dem Grad der Zelle A definiert: $E'_\emptyset = 0_\emptyset$, $a' = b$, $b' = 0_a$, $c' = -b$ ((a, b, c) Schnitt), $(Bz)' = B'z + B^*z'$, und dann linear auf beliebige Ketten erweitert. Die Summe aller Zellen des Typus α vom Range 0 ist der Refinor E_α . Definition der Pseudosumme \oplus beliebiger Ketten: $K_\alpha \oplus L_\beta = K_\alpha E_\beta + E_\alpha L_\beta$ (die Kettenmultiplikation ist dabei linear auf Grund der Zellenmultiplikation definiert). Eine Darstellung (Γ, f, X) des Gatters Γ in der Menge X ist eine Funktion $f(\gamma, x)$, $\gamma \in \Gamma$, $x \in X$, mit Werten $-1, 0, 1$. Ist X ein topologischer Raum und ist für jedes γ die Menge der x , für welche $f(\gamma, x) = 1 (= -1)$, offen, so heißt die Darstellung stetig. Bei gegebener Darstellung wird jeder Kette K ein Bereich (locus) $|K|$ zugeordnet, der eine Teilmenge von X ist: $|E_\emptyset| = X$; $|a|$, $|b|$, $|c|$ [$(a, b, c) = \gamma$ Schnitt] Menge der x , für welche $f(\gamma, x) \leq 0$, $= 0$, ≥ 0 ; $|z_1, \dots, z_m| = |z_1| \cap \dots \cap |z_m|$; $|\lambda A| = |A|$ für $\lambda \neq 0$, $|0A| = 0$; $|\sum_1^n \lambda_i A_{\alpha_i}| = |\lambda_1 A_{\alpha_1}| \cup \dots \cup |\lambda_n A_{\alpha_n}|$.

Die natürliche Darstellung (Γ, h, Y) des Gatters Γ ist die folgende Darstellung in der Menge Y der Funktionen auf der Menge der Schnitte mit Werten $-1, 0, 1$: $h(\gamma, y) = y(\gamma)$; $||K||$ bezeichnet den Bereich von K bei dieser Darstellung. Ein Ideal Φ von Γ ist eine solche Menge von Ketten von Γ , daß (1) $0_\emptyset \in \Phi$, (2) mit K_α und L_α auch $K_\alpha + L_\alpha \in \Phi$, (3) wenn $||K|| \subset ||L||$ und $L \in \Phi$, auch $K \in \Phi$. Φ und Ψ seien im folgenden stets Ideale von Γ . Die Kette K heißt Zyklus mod Φ , wenn $K' \in \Phi$; K berandet in Ψ mod Φ , wenn $K = W' + Z$ ($W \in \Psi$, $Z \in \Phi$); K_α

und L_β sind homolog in $\Psi \bmod \Phi$, wenn es einen solchen Refinor E_γ gibt, daß $(K_\alpha \oplus (-L_\beta))E_\gamma$ in $\Psi \bmod \Phi$ berandet. Die Ketten von Ψ , die Zykeln mod Φ sind, zerfallen nun in Klassen in $\Psi \bmod \Phi$ homologer; diese Klassen $[K]$ werden auf Grund der Festsetzungen $[K] + [L] = [K \oplus L]$, $[K][L] = [KL]$ zu einem Ring $\mathfrak{H}(\Psi/\Phi)$, dem Homologiering von $\Psi \bmod \Phi$; die Klassen $[K^e]$ bilden eine additive Gruppe, die e -te Homologiegruppe. Ist (Γ, f, X) eine stetige Darstellung von Γ im topologischen Raum X , so sind die Ideale $\Phi_0(\Psi_c)$ der Ketten ausgezeichnet, deren Bereiche leer (kompakt) sind; $\mathfrak{H}(\Psi_c/\Phi_0)$ heißt der Homologiering der Darstellung. Anwendung: X topologischer Raum, Γ Menge der — als abstrakte Tripel aufgefaßten — stetigen reellen Funktionen auf X , Darstellung (Γ, f, X) : $f(\gamma, x) = \text{signum } \gamma(x)$; der Homologiering $\mathfrak{H}(\Psi_c/\Phi_0)$ dieser Darstellung ist eine Invariante von X , im Falle von Mannigfaltigkeiten ist er — wie in einer weiteren Arbeit gezeigt werden soll — dem klassischen Schnitttring isomorph.

Specker (Zürich).

Wu, Wen-tsun: On the product of sphere bundles and the duality theorem modulo two. Ann. Math., Princeton, II. s. 49, 641—653 (1948).

Zwei Sphärenbündeln \mathfrak{S}_i mit den Basiskomplexen K_i und den $(n_i - 1)$ -dimensionalen Sphären S^{n_i-1} als Fasern ($i = 1, 2$) wird in natürlicher Weise ein Sphärenbündel \mathfrak{S}_3 mit dem Basiskomplex $K_3 = K_1 \times K_2$ und der Faser S^{n_3-1} ($n_3 = n_1 + n_2$) zugeordnet; ist $K_1 = K_2 = K$, so ist das Teilbündel \mathfrak{S}_4 über der Diagonale $K_4 = K$ von $K \times K$ das Produktbündel im Sinne von Whitney. W_k^r sei für $1 \leq r \leq n_k$ ($n_4 = n_3$) die — eventuell mod 2 reduzierte — charakteristische Klasse von \mathfrak{S}_k , W_k^0 die nulldimensionale Kohomologiekategorie mod $2 \neq 0$ von K_k , $W_k^r = 0$ für $r > n_k$. Dann ist: (1) $W_3^r = \sum_{i=0}^r W_1^i \times W_2^{r-i}$, (2) $W_4^r = \sum_{i=0}^r W_1^i \cup W_2^{r-i}$. (2) ist der „Dualitätssatz mod 2“ von H. Whitney [Lectures in Topology, Univ. of Michigan Press 1941; Beweisskizze in Proc. nat. Acad. Sci. USA 26, 143—148 (1940); dies. Zbl. 23, 383]. Verf. gewinnt (2) aus (1) auf Grund der Lefschetzschen Definition des Cupproduktes. Zum Beweis von (1) werden die den Sphärenbündeln entsprechenden linearen Vektorbündel betrachtet und W_3^r berechnet mit Hilfe eines Vektorfeldes $\Phi_i(p_1 \times p_2) = \Phi_{1,i}(p_1) + \Phi_{2,i}(p_2)$ [$i = 1, \dots, n_3 - r + 1$, $p_j \in K_j$, $\Phi_{j,i}(p_j)$ geeignet gewähltes Vektorfeld über K_j], das auf dem $(r - 1)$ -dimensionalen Gerüst von K_3 linear unabhängig ist.

Specker (Zürich).

Klassische theoretische Physik.

• **Houston, W. V.:** Principles of mathematical physics. 2. ed. McGraw-Hill 1948. XII, 363 p. 30 s.

Mechanik:

• **Pöschl, Th.:** Einführung in die analytische Mechanik. Karlsruhe: G. Braun 1949. VIII, 166. S. DM 10.—.

Il est difficile d'offrir en si peu de pages une introduction plus complète à la Mécanique analytique. L'A. suppose chez son lecteur un minimum de connaissances générales d'algèbre et d'analyse; il le conduit, cependant, depuis les principes de la Mécanique newtonienne jusqu'aux parties assez élevées de la science, sans, pour autant, cesser d'être d'un niveau presque toujours accessible. Un lecteur moyen pourra ainsi, au prix d'un effort relativement minime, parcourir tout le chemin qui mène de la mécanique classique au seuil des Mécaniques quantiques. — Mais pour nous rendre mieux compte de la richesse des matières traitées dans ce volume, jetons un coup d'oeil rapide sur la table des matières. — La première partie du livre (87 pages) est consacrée aux théories classiques. L'A., toujours simple et clair, expose d'abord la dynamique du point matériel, puis les principes généraux de la mécanique analytique des systèmes de points (théorème du travail virtuel, équations de Lagrange, principe de Gauss, théorie des petits mouvements). — Il applique ensuite ces généralités à la résolution des problèmes les plus importants de la dynamique du point et des solides. Notons le

souci de l'A. d'élargir le cadre des exposés traditionnels et de moderniser la présentation des résultats: ainsi, l'A. emprunte à des travaux de physique théorique relativement récents des énoncés de problèmes (cf. par ex. p. 34) et des démonstrations des formules classiques (cf. p. 25 un calcul emprunté à A. Sommerfeld et encore, p. 65 où l'auteur utilise les rudiments du calcul matriciel pour effectuer la réduction des formes quadratiques). Cette tendance mérite d'être soulignée quand il s'agit de manuels scolaires traitant des questions classiques, malaisées à renouveler aujourd'hui; la remarque s'applique d'ailleurs à toutes les parties de l'ouvrage. — Le défaut de place n'a, sans doute, pas permis à l'A. de déborder le cadre de la mécanique lagrangienne; l'ouvrage est muet sur les systèmes non-holonomes. Mais, après tout, y-a-t-il intérêt à en parler lorsqu'on veut écrire une introduction aux physiques modernes! — La deuxième partie (35 pages) est d'un niveau autrement élevé et la personnalité de l'A. semble s'y affirmer d'avantage. Après avoir établi brièvement les équations d'Euler pour le problème classique d'extremum, l'A. aborde l'interprétation variationnelle des équations de Lagrange et de leurs conséquences (principes de Hamilton et de Maupertuis — dont il donne une démonstration simple, due à Birkhoff). L'A. montre ainsi — comme il est bien connu — que le calcul des variations permet de démontrer et de grouper d'une manière commode toutes les propriétés classiques des équations des systèmes holonomes. Cette marche oblige l'auteur à développer, plus qu'il n'est coutume de le faire dans un livre élémentaire, diverses théories variationnelles; il va jusqu'à établir la célèbre formule de Hilbert et à dire quelques mots des transversales. Mais alors, les équations canoniques, leurs propriétés extrémales, la théorie du dernier multiplicateur, le théorème de Jacobi, peuvent être présentés en quelques lignes. — Toutefois, du point de vue strictement pédagogique, on peut se demander si ce mode d'exposition, très exclusif, est efficace. L'extrême concision des raisonnements n'est pas de nature à faciliter la tâche d'un néophyte et encore moins à lui donner une vue claire des questions, parfois délicates, qu'on ne saurait traiter en si peu de pages avec toute la rigueur désirable. — Enfin, les 40 dernières pages sont consacrées à la solution de quelques problèmes célèbres de la mécanique analytique en variables canoniques. Les derniers paragraphes exposent les applications des équations canoniques à la théorie élémentaire des quanta; quelques exemples simples illustrent ces généralités. — Me sera-t-il permis d'exprimer le regret que l'A. n'ait pas cru devoir consacrer quelques lignes aux vues de M. E. Cartan; il aurait alors trouvé le moyen d'exposer et l'occasion de rattacher simplement la théorie des invariants intégraux aux questions traitées dans la deuxième partie. — Quoiqu'il en soit, ce petit livre est appelé à rendre des services; en France, il pourra être consulté avec profit par des étudiants titulaires du certificat de Mécanique rationnelle qui désirent s'initier aux Physiques quantiques.

J. Kravtchenko (Grenoble).

● **Beghin, Henri:** Cours de mécanique. Tome I. Edition provisoire polycopiée. Paris: Gauthier-Villars 1948. 588,9 pp. 1800 fr.

Äußerlich hält sich das Werk an den vielfach üblichen Aufbau. In 18 Kapiteln steigt es von kinematischen Betrachtungen über Schwerpunktsatz, Momentensatz und Energiesatz auf bis zu den Lagrangeschen Gleichungen, den Gleichungen von Appell und den ersten Elementen der analytischen Mechanik, d. h. bis zu Poisson, Hamilton, Jacobi und Gauß. Was den genaueren Inhalt angeht, so kann man es als eine Vereinigung von elementarer Mechanik mit technischer Mechanik bezeichnen. Das verdient besonders hervorgehoben zu werden: es ist außerordentlich reichhaltig an konkreten Beispielen und Aufgaben, unter denen sich auch manch Neues befindet. Es scheut auch nicht die Einbeziehung der Reibung und die Behandlung der Schwierigkeiten, die bekanntlich die Coulomb-Morinschen Gesetze mit sich bringen. Es ist in jeder Beziehung lebensnahe, der Student kann viel aus ihm lernen. Gerne hebt Ref. auch hervor, daß die dogmatische Trennung von Punktmechanik und Mechanik der Continua vermieden ist, obwohl der letzteren ein zweiter Band gewidmet werden soll. Einfache Fälle aus der Theorie der Fäden und Flüssigkeiten sind oft eingestreut. Auch ist die ganze Anlage dementsprechend. Vielleicht fehlt eine letzte Schärfe der Voraussetzungen und der Begriffe, was aber bei dieser ganz auf das Konkrete zugeschnittenen Darstellung nicht so sehr ins Gewicht fällt. So tritt die Voraussetzung des Skleronomseins bei Behandlung des Energiesatzes nicht ganz klar hervor. Im ganzen ein höchst erfreuliches Buch.

Hamel (Landshut/Bayern).

Rocard, Yves: Sur les conditions d'auto-oscillation des systèmes vibrants. Proc. phys. Soc. London 61, 393—402 (1948).

Verf. sucht die seit langem bekannten mathematischen Stabilitätskriterien von Routh-Hurwitz bzw. Nyquist für die Selbsterregung schwingfähiger Systeme physikalisch zu deuten und damit zu veranschaulichen. An Hand mehrerer instruktiver elektrischer und mechanischer Beispiele, unter welch letzteren besonders der elastische Flugzeugflügel und das federnde Fahrzeug hervorgehoben seien, sucht Verf. die Bedingungen der Schwingungserregung in wenigen allgemeinen Sätzen zusammenzufassen, von denen folgende erwähnt seien: Bei Systemen von nur

einem Freiheitsgrad haben die schwingungserregenden Kräfte notwendigerweise den Charakter negativer Widerstandskräfte. Bei Systemen, die durch Koppelung aus solchen mit nur je einem Freiheitsgrade hervorgehen, verwischen sich zwar die einzelnen Eigenfrequenzen, es gibt aber, wie sie Verf. nennt, „Reaktionskoppelungen“, die ohne Einführung irgendwelcher Widerstandskräfte die erwähnten Eigenfrequenzen näherungsweise wiedergeben. Solche Systeme geraten immer dann in Schwingungen, wenn zwei ihrer Eigenfrequenzen zusammenfallen. Wirken aber Widerstandskräfte auf sie ein, so ergibt sich das überraschende Resultat, daß diese das Auftreten des Selbstschwingens erleichtern. Eine vollständige Darstellung dieser Betrachtungen findet man in des Verf. Werk: „Allgemeine Dynamik der Schwingungen“, das 1943 in Frankreich erschien. (2. Aufl. in Vorbereitung.) Bezüglich der selbsterregten Fahrerschwingungen gekoppelter Fahrzeuge sei auf die umfassenden Arbeiten von Ziegler [Ingenieur-Arch. 9, 96—108, 241—243 (1938)] verwiesen.

Karas (Darmstadt).

Thomas, T. S. E.: Distortion in manometer and oscillograph records. Philos. Mag., J. theor. exper. appl. Physics, London, VII. s. 38, 361—368 (1947).

Bei der Aufzeichnung einzelner vorübergehender Impulse durch die in der Schwingungstechnik heute unentbehrlichen Instrumente, wie Manometer oder Oszillographen, z. B. beim Saitengalvanometer oder dem Schleifenoszillographen mit Lichtzeiger und Trommelkamera, entstehen dann größere Abweichungen vom wirklichen Verlauf der i. a. unbekannten Erregungsfunktion $F(t)$, wenn während deren Dauer mehrere Instrumentenschwingungen erfolgen. — Verf. zeigt dies mittels der einfachen Ansätze $F(t) = K \cdot \cos pt$ bzw. $F(t) = Kte^{-t}$ und weist an Schaubildern nach, daß die Abweichungen bei aperiodisch gedämpften Instrumenten größer sind als die für $r = 0,7 r_c$ mit r_c als Größe der kritischen, Aperiodizität erzeugenden Dämpfung erhaltenen und insbesondere dann merklich werden, wenn die Impulsdauer mit der Periode des ungedämpften Instrumentes übereinstimmt. Fallen mehrere Eigenperioden des Instrumentes in die Impulsdauer, so gibt die übliche Methode der Elimination dieser Instrumentenwellen mittels Durchschnittsbildung hinlänglich gute Ergebnisse bei der Gewinnung der Erregerfunktion $F(t)$ und ist nur dort mit Vorsicht anzuwenden, wo $dF(t)/dt$ Unstetigkeiten aufweist.

Karas (Darmstadt).

Staring, A. J.: Über Zentralbewegungen, besonders längs einer Ellipse. Simon Stevin, wis. natuurr. Tijdschr. 25, 208—223 (1947) [Holländisch].

In einem zentralen Kraftfeld beschreibt bekanntlich jeder Massenpunkt mit konstanter Flächengeschwindigkeit eine ebene Bahn, und diese Eigenschaft ist für solche Kraftfelder kennzeichnend. Verf. gibt zunächst eine Formel für die Beschleunigung bei einer solchen zentralen Bewegung, die sich einfach auf den Fall anwenden läßt, daß die Bahn eine Ellipse ist. Ist das Kraftfeld konservativ, so kann das nur eintreffen, wenn das Zentrum auf einer Achse der Ellipse liegt. Eine solche Bewegung ist auch dann möglich, wenn das Kraftfeld nicht das Newtonsche oder das zur harmonischen Bewegung gehörige ist, in diesen Fällen wird die Bahn aber nur bei besonderer Wahl von Anfangspunkt und -richtung eine Ellipse, so daß diese Felder zur Erklärung astronomischer Ellipsenbewegungen ungeeignet sind. — Verf. zeigt dann, wie jede zentrale Bewegung längs einer elliptischen Bahn, insbesondere also die Keplerbewegung und auch die zweier Doppelsternkomponenten, mechanisch realisiert werden kann. Wichtig ist dabei, daß jede solche Bewegung als Parallelprojektion einer ebenfalls zentralen Bewegung längs einer kreisförmigen Bahn aufgefaßt werden kann; das folgt sofort aus dem eingangs erwähnten Satz.

Bol (Freiburg).

Elastizität. Plastizität:

● **Föppl, L.: Drang und Zwang. Eine höhere Festigkeitslehre für Ingenieure.** III. Bd. München, Leibniz-Verlag, 1947. 191 S. m. 82 Abb.

Der vorliegende dritte Band des bekannten Werkes behandelt ausschließlich den ebenen Spannungszustand, dessen Darstellung gegenüber dem räumlichen Spannungszustand erhebliche Vereinfachungen gestattet. Im ersten Abschnitt werden die allgemeinen Grundlagen des ebenen Spannungs- und Formänderungszustandes angegeben, wobei die Airysche Spannungsfunktion in rechtwinkligen und Polarkoordinaten eingeführt wird. Es folgen Abschnitte über Spannungs-

zustände in der unendlichen Halbebene und im Keil bei Randbelastung durch Einzelkräfte und bei stetiger Belastung mit vielen praktisch wichtigen Beispielen. Die Inversion ebener Spannungszustände wird durch Darstellung ihrer Grundbegriffe eingeführt und am Beispiel der durch zwei Lasten beanspruchten Walze sowie der durch drei Einzellasten senkrecht zum Rand beanspruchten Kreisscheibe erläutert. In diesem Abschnitt vermißt man jedoch einen Hinweis auf die grundlegenden Arbeiten von J. H. Michell [Proc. Lond. math. Soc. **34**, 134—142 (1902)], vgl. C. B. Biezeno und R. Grammel, Technische Dynamik, Berlin 1939, 405; dies. Zbl. **22**, 29. Der fünfte Abschnitt behandelt die allseitig unendliche Ebene unter Belastung durch Einzellast und Moment sowie die Halbscheibe mit Einzellast im Innern. Beim Spannungszustand in krummlinigen Koordinaten wird der ebene Spannungs- und Formänderungszustand zunächst als Sonderfall des räumlichen Spannungszustandes eingeführt, wonach die Spannungen und Verschiebungen durch harmonische Funktionen dargestellt werden. Es folgt eine allgemeine Erläuterung über krummlinige Koordinaten in der Ebene sowie eine Darstellung der auf krummlinige Koordinaten bezogenen Spannungen. Als Beispiel wird die unendliche Scheibe unter Zug mit kreisförmiger und ellipsenförmiger Bohrung behandelt. Die Gleichgewichtsbedingungen sowie die Airysche Spannungsfunktion in krummlinigen Koordinaten werden dargestellt, wonach der Spannungszustand in einem Stab mit beiderseitiger Außenkerbe angegeben wird. Das Bipolar-Koordinatensystem wird eingeführt und dessen Anwendung am Beispiel des exzentrischen Ringes unter Außen- und Innendruck erläutert, woraus sich als Sonderfall die gelochte Halbscheibe unter gleichmäßiger Druckbelastung ergibt. Im achten Abschnitt wird der geschlossene Ring unter gleichmäßigem Innen- und Außendruck sowie der Kreisringsektor unter Biegung behandelt. Ein einfaches Beispiel veranschaulicht Eigenspannungen im Kreisring. Betrachtungen über Spannungen durch Eigengewicht und durch Zentrifugalkräfte sowie über Wärmespannungen schließen das Buch ab. — Die Literaturhinweise sind zum Teil unvollständig, angelsächsische und amerikanische Arbeiten sind kaum berücksichtigt. Beim Hinweis auf die Arbeit von W. Olszak über die Anwendung der Inversionsmethode bei Behandlung von ebenen Problemen der Elastizitätstheorie (S. 90) ist ein Druckfehler unterlaufen. Die Figuren 75 und 76 auf S. 180 sind zu unscharf, um ihren Zweck zu erfüllen. *Gran Olsson (Trondheim).*

Fadle, J.: Eine einfache vektoranalytische Ableitung der Grundgleichungen der Elastomechanik für orthogonale, krummlinige Koordinaten. Ingenieur-Arch. **17**, 62—70 (1949).

Die Formeln für die partiellen Ableitungen eines Feldvektors, der durch seine Komponenten in einem krummlinigen orthogonalen Koordinatensystem gegeben ist, gestatten eine einfache Ableitung der Grundgleichungen der Elastizitätstheorie. Zugleich ergeben sich einfache Darstellungen für die Dehnungen, Winkeländerungen und die Rotation des Verschiebungsvektors. Unter Heranziehung der Tensorrechnung lassen sich mit Hilfe des Gaußschen Integralsatzes die Grundgleichungen kürzer ableiten; die Dehnungen, Schiebungen und die Rotation des Verschiebungsvektors lassen sich durch den Verzerrungstensor mit Hilfe des Nabla-Operators einfach ausdrücken. *Moufang (Frankfurt a. M.).*

Grammel, R.: Scherprobleme. Ingenieur-Arch. **17**, 107—118 (1949).

Verf. behandelt eine besondere Klasse von Ausweichproblemen, die gemeinsam als Scherprobleme (Zugscherung, Torsionsscherung, Biegescherung) bezeichnet werden. Scherprobleme sind einfache, aber wenig oder gar nicht bekannte Stabilitätsprobleme, bei denen der Spannungszustand (zum Unterschied vom Knicken und Kippen von Stäben, Platten und Schalen) im allgemeinen nicht zusammengesetzt ist. Als Eigenwertprobleme (zweiter Art) unterscheiden sich die Scherprobleme wesentlich von den üblichen Eigenwertproblemen (erster Art) der kontinuierlichen, elastischen Systeme. Die Bezeichnung Scherproblem wird vom Verf. mit der Begründung eingeführt, daß die belastenden Kräfte, wenn sie von Null an stetig anwachsen, bei einem bestimmten Betrag, der Scherkraft, plötzlich ausschlagen und damit die Formänderung hervorrufen. — Das Problem wird zunächst am Beispiel der Torsionsscherung einer Welle erläutert, dann allgemein als Eigenwert- bzw. Verzweigungsproblem formuliert und dargestellt, wozu noch weitere nach der allgemeinen Darstellung naheliegende Beispiele hinzugefügt werden. Den merkwürdigsten Fall bildet dabei ein aus erster und zweiter Art gemischtes Problem, nämlich die Knickung eines Stabes durch Zugkräfte. Beispiele über die Biegescherung von Platten schließen die Arbeit ab. — Wie Verf. bemerkt, können zu den

Scherproblemen die früher ebenfalls vom Verf. untersuchten Kipperscheinungen an Ringen infolge radialer Innen- und Außenkräfte gerechnet werden [Z. angew. Math. Mech. 3, 429—441, S. 438 (1923); 7, 198—210 (1927) oder C. B. Biezeno und Verf., Techn. Dynamik, Berlin 1939, S. 562]. Auch bei den so beanspruchten Ringen scheeren unter gewissen Umständen die Kräfte, wenn sie von Null stetig anwachsen, bei einem bestimmten Betrag seitlich, d. h. axial aus, allerdings erst nach einer Ausdehnung bzw. Verengung des Ringes, weshalb man es hier mit einem zusammengesetzten Spannungszustand zu tun hat. *Gran Olsson* (Trondheim).

Sonntag, Gerh.: Die Momentbelastung des Halbraumes. Z. angew. Math. Mech. 28, 263—270 (1948).

Aus den bekannten Boussinesqschen Gleichungen für den Spannungszustand des Halbraumes unter der Einwirkung einer Einzelkraft P senkrecht zu dessen Begrenzungsebene gewinnt Verf. durch Differentiation nach einer Richtung die Spannungsgleichungen für eine Momentenbelastung in der Begrenzungsebene, deren Vektor senkrecht zur Differentiationsrichtung liegt. Hierbei mußten die beiden noch fehlenden Schubspannungen aus dem Gleichgewicht eines zylindrischen Körperelementes bestimmt werden. — In gleicher Art wurde aus den Vogtschen Gleichungen für den Spannungszustand des Halbraumes unter der Einwirkung einer Scherkraft in der Begrenzungsebene der Spannungszustand für eine Momentenbelastung senkrecht zur Begrenzungsebene gewonnen, der nur zwei Schubspannungen aufweist. In Überlagerung mit dem Spannungszustand für eine Einzellast normal zur Begrenzungsebene wird dieser Spannungszustand beim Bohren zu erwarten sein. — Hinsichtlich der hier behandelten Probleme vgl. man eine Arbeit von E. Reißner [Freie und erzwungene Torsionsschwingungen des elastischen Halbraumes. Ingenieur-Arch. 8, 229—245 (1937)], die sich der komplexen Schreibweise bedient. *Karas*.

Neuber, H.: Vereinfachtes Verfahren zur Spannungsberechnung in dünnwandigen prismatischen Hohlkörpern unter Innendruck. Z. angew. Math. Mech. 28, 187—189 (1948).

Es gelingt dem Verf., die dreifach statisch unbestimmte Aufgabe der Berechnung von Biegemoment, Längs- und Querkraft eines dünnwandigen prismatischen Hohlkörpers unter Innendruck durch Einführung eines „Biegezentrams“ Q_n mit den Koordinaten y_1, z_1 und einer Strecke ϱ besonders anschaulich zu gestalten und zu vereinfachen; denn dann erscheint die Längskraft S eines Wandungspunktes als Produkt des Innendruckes p mit der auf die Wandungsnormale projizierten Entfernung des Biegezentrams vom Wandungspunkt, die Querkraft als Produkt von p mit der Projektion derselben Strecke auf die Wandungstangente, während das Quadrat dieses Abstandes, vermindert um ϱ^2 und mit $\frac{1}{2} p$ multipliziert, das Biegemoment ergibt. Daraus folgt sofort, daß die Schnittpunkte des um Q_n mit ϱ konstruierten Kreises mit der Wandungsmittellinie die Momenten-Nullpunkte, die Punkte der größten bzw. kleinsten Entfernung von derselben die Stellen der größten bzw. kleinsten Spannung ergeben. Die 3 statisch unbestimmten Größen y_1, z_1, ϱ werden mittels des Satzes vom Extremum der Formänderungsenergie bei Vernachlässigung der Längskraftenergie ermittelt und hierzu übersichtliche und praktische Formeln angegeben. *Karas* (Darmstadt).

Stevenson, A. C.: The centre of flexure of a hollow shaft. Proc. London math. Soc., II. s. 50, 536—549 (1949).

Ein hinreichend langer, zylindrischer Stab mit kreisförmigem Querschnitt enthält eine ebenfalls kreisförmige, exzentrische Bohrung. Die Ausbiegung dieses hohlen Schaftes bei beliebiger Belastung ist gesucht. — Angeregt durch eine Bemerkung von Love (1906) über die Form der Lösung dieses Problems berechneten Young, Elderton und Pearson (1918) die Ausbiegung durch Entwicklung nach Orthogonalfunktionen, allerdings ohne explizite Berechnung der Koeffizienten dieser Entwicklung. Behandelt wurde der Fall, daß die Last senkrecht zur Symmetrieachse des Schaftquerschnittes angreift. Später (1936) gab Seth die Lösung für die Fälle, daß die Last entlang der Symmetrieachse sowie senkrecht zu ihr angreift. Er berechnete außerdem die zugehörige Verdrehung (twist). Angriffspunkt der Last war der Mittelpunkt

des Querschnittes. — Verf. knüpft hier an, indem er die von ihm an anderer Stelle eingeführten kanonischen Biegungsfunktionen und Momentintegrale aufsucht und mit ihrer Hilfe sowohl die Koeffizienten der Reihenentwicklung als auch die zugehörige Verdrehung explizit berechnet. — Eine weitere Bestimmung der Koeffizienten der Reihenentwicklungen wird möglich, wenn als Angriffspunkt der Last das Biegezentrum gewählt wird, für das die mittlere Verdrehung des Querschnittes verschwindet. Man kann auch den weiteren Fall ins Auge fassen, daß die Last so angreift, daß die Deformationsenergie des ganzen Balkens ein Minimum wird. Die Koordinaten dieses „Zentrums kleinster Spannung“ sowohl wie jene des Biegecenters wurden von Verf. berechnet als Funktionen der „kanonischen Momentintegrale“, außerdem wurden Formeln für die zugehörige Verdrehung angegeben. Die Arbeit enthält Tabellen für die numerischen Werte der zugeordneten Verdrehung, der Koordinaten des Zentrums kleinster Spannung und des Biegecenters in Abhängigkeit vom Radius der Bohrung und deren exzentrischer Lage. Im Grenzfall des unbegrenzten Heranrückens der Bohrung an den Außenzylinder können die Momentintegrale durch bestimmte Gammafunktionen ausgedrückt werden. *Hardtwig.*

Šapiro, G. S.: Achsensymmetrische Formänderungen eines Rotationsellipsoids. Doklady Akad. Nauk SSSR, II. s. 58, 1309—1312 (1947) [Russisch].

Die im Titel der Arbeit gestellte Aufgabe wird mit Hilfe der Spannungsfunktionen von B. G. Galerkin (C. r. Acad. Sci. URSS, Ser. A 1930, 353—358) in der von P. F. Papkovič [dies. Zbl. 24, 134] vorgeschlagenen Formulierung gelöst. Als Beispiel ist die allseitige Dehnung der Oberfläche eines Rotationsellipsoids angegeben, wobei die Spannungen σ_r und σ_t in radialer und tangentialer Richtung zahlenmäßig zusammengestellt und in Kurven graphisch dargestellt sind. Zum Vergleich sind dieselben Größen für die einachsige Dehnung des Ellipsoids in Richtung der Rotationsachse nach H. Neuber [Kerbspannungslehre, Berlin 1937] in die Figur eingetragen.

Gran Olsson (Trondheim).

Trifan, D.: On the plastic bending of circular plates under uniform transverse loads. Quart. appl. Math. 6, 417—427 (1949).

Der wesentliche Zweck der vorliegenden Arbeit besteht in der Untersuchung des mechanischen Verhaltens dünner Platten, die einer zur Plattenebene senkrecht gerichteten Belastung unterworfen sind. Dabei wird der Werkstoff der Platten als homogen und isotrop mit einem stetigen Übergang vom elastischen zum plastischen Zustand vorausgesetzt. Die beiden Plastizitätstheorien, nach A. A. Ilyushin [Priklad. Mat. Mech., Moskva 9, 207—218 (1945)] Theorie des plastischen Fließens (Prandtl, Reuss, Prager) bzw. Theorie der plastischen Formänderung (Hencky, Nadai) genannt, werden der Untersuchung zugrunde gelegt und miteinander verglichen. Als Beispiel wird eine Kreisplatte mit gleichmäßig verteilter Querbeltung im einzelnen durchgerechnet. Aus der Rechnung kann man schließen, daß, obwohl die Theorien des plastischen Fließens bzw. der plastischen Formänderung sich auf verschiedene Annahmen gründen, ihre Ergebnisse bei Kreisplatten unter gleichmäßiger Belastung und dem der Untersuchung zugrundegelegten Werkstoff für alle praktischen Zwecke so gut wie identisch sind. Beide Plastizitätstheorien geben indessen eine Abweichung von der Lösung der Elastizitätstheorie um etwa 10%, abhängig von der Lage des betrachteten Punktes auf der Platte. *Gran Olsson.*

Goriupp, K.: Die dreiseitig gelagerte Rechteckplatte. I. Ingenieur-Arch. 16, 77—98 (1947). Berichtigung: Ingenieur-Arch. 16, 446 (1948).

Verf. leitet zunächst durch Gleichgewichtsbetrachtungen eines Plattenelementes die elastischen Grundgleichungen her, wobei es ihm durch Einführung des Begriffes der Momentensumme gelingt, den Differentialausdrücken für die Biegemomente und Querkräfte einfache Formen zu geben. — Um eine allgemeine Darstellung des elastischen Gleichgewichtes der Platte zu erhalten, wird nach dem Vorgehen von F. Tölke [Ingenieur-Arch. 5, 187—237 (1934)] die Greensche Funktion für eine Einzellast durch einfache trigonometrische Reihen dargestellt. Zu diesem Zwecke werden zunächst für die Durchsenkungsflächen einer dreiseitig frei gelagerten Platte bei Linienbelastung Reihenansätze eingeführt und deren Konstanten aus den hier vorliegenden Rand- und Übergangsbedingungen bestimmt. Durch einen Grenzübergang erhält Verf. hieraus die Greensche Funktion für eine Einzellast und mittels dieser dann in bekannter Art durch Integration die Durchsenkung für eine allgemein verteilte Belastung. — Insbesondere wird mittels der so gewonnenen allgemeinen Lösung zunächst (Abschnitt b) die frei aufliegende Platte mit konstanter Belastung behandelt, wobei sich bedeutsame Vereinfachungen

ergeben und in der Grenze auch noch die bekannte Lösung von A. Nadai [Die elastischen Platten, Berlin 1925] erhalten wird. Analog werden die Fälle der frei aufliegenden Platte mit Dreieckslast behandelt (Abschnitt c), während im Abschnitt d die an den gegenüberliegenden Rändern frei aufliegende, an der dritten Seite eingespannte Platte sowohl für gleichmäßige Belastung, als auch für Dreiecksbelastung erledigt wird, wobei die Lösung im letzten Falle sich aus der des Abschnittes b für die dreiseitig frei gelagerte Platte und aus der alleinigen Wirkung eines Randmomentes längs der Einspannseite zusammensetzt. — Teilsummierungen gewisser Fourier-Reihen in geschlossener Form ermöglichten für die Restreihen eine raschere Konvergenz, so daß in den meisten Fällen wegen der Beibehaltung nur weniger Reihenglieder geschlossene Formeln mit Fehlern durchweg kleiner als 1 angegeben werden konnten. — Einige Beispiele mit Tabellen und Diagrammen zeigen den günstigen Einfluß der dreiseitigen Lagerung auf. *Karas (Darmstadt).*

Goriupp, K.: Die dreiseitig gelagerte Rechteckplatte. II. Ingenieur-Arch. 16, 153—163 (1948).

Verf. untersucht in dieser Abhandlung noch die dreiseitig gelagerten Rechteckplatten bei Einspannung der gegenüberliegenden bzw. aller drei Ränder. Die endgültige Durchsenkung setzt sich dann aus der Durchsenkung w_0 der dreiseitig frei gelagerten Platte und aus einer weiteren w_1 zusammen, die die Durchsenkung der lastfreien Platte unter ausschließlichem Einfluß der Einspannmomente der Seiten angibt. Ebenso erhält man auch die Momente und Querkräfte durch Summierung aus den w_0 und w_1 entsprechenden Größen. Während aber w_0 , wie früher (s. vorsteh. Referat) gezeigt wurde, fast durchweg in geschlossenen Formeln angegeben werden konnte, mußten für w_1 und die bezüglichlichen statischen Größen zwar Reihen beibehalten werden, deren Konvergenz aber so gut ist, daß für praktische Zwecke schon die Beibehaltung nur weniger Glieder ausreichend ist. — Verf. gibt nach diesen Grundsätzen die Lösungen bei gleichmäßiger Belastung und Dreiecksbelastung allgemein an. Für gleichmäßige Belastung gibt er die Berechnung für die oben angegebenen Einspannungsarten an zwei Beispielen ausführlich wieder und stellt die Ergebnisse in Tafeln und Diagrammen wie in der I. Mitteilung übersichtlich dar. Dabei kann er die Übereinstimmung mit den Ergebnissen von F. Tölke [Ingenieur-Arch. 5, 187—237 (1934)] und W. Koepke [Über das Randwertproblem an rechteckigen Platten, Diss. Berlin 1940] in speziellen Fällen erweisen.

Karas (Darmstadt).

Rivlin, R. S.: Large elastic deformations of isotropic materials. IV. Further developments of the general theory. Philos. Trans. R. Soc. London, A 241, 379 bis 397 (1948).

Fortsetzung zu drei vorhergehenden Arbeiten über denselben Gegenstand [dies. Zbl. 29, 326, 327]. In III wurde gezeigt, daß die Berechnung der zur Erzeugung einer gegebenen Verformung erforderlichen Kräfte für einen Körper aus hochelastischem Material nur möglich ist, wenn der explizite Ausdruck für die durch die skalaren Invarianten ausgedrückte Verformungsenergie bekannt ist. Hier wird eine andere, geeignetere Form zur Lösung der Gleichungen für die genannte Aufgabe angegeben. Als Beispiele werden die Oberflächenkräfte berechnet, die zur Erzeugung einer einfachen Gleitung eines rechtwinkligen Parallellachs (Cuboid) aus kompressiblem oder inkompressiblem Material und einer einfachen Torsion eines geraden Kreiszylinders aus inkompressiblem Material erforderlich sind.

Th. Pöschl (Karlsruhe).

Richter, Hans: Verzerrungstensor, Verzerrungsdeviator und Spannungstensor bei endlichen Formänderungen. Z. angew. Math. Mech. 29, 65—75 (1949).

Hencky hat die Logarithmen der Hauptdehnungen als Verzerrungsgrößen bei endlichen Formänderungen bei isotropen Stoffen eingeführt. Diese Definition des Verzerrungstensors wird hier als Spezialfall einer Systematik aus folgenden Postu-

laten wiedergewonnen, wobei \mathfrak{A} die Matrix der linearen Transformation der Koordinatendifferentiale und \mathfrak{G} der metrische Fundamentaltensor sei: 1. Der Verzerrungstensor $\mathfrak{B}(\mathfrak{A})$ ist der Matrix \mathfrak{A} zugeordnet und hängt außer \mathfrak{A} nur noch von \mathfrak{G} ab. 2. Ist \mathfrak{R} eine Drehung, so ist $\mathfrak{B}(\mathfrak{A}\mathfrak{R}) = \mathfrak{B}(\mathfrak{A})$. 3. Es gilt ein Superpositionsprinzip so, daß zu 2 koachsialen Streckungen \mathfrak{S}_1 und \mathfrak{S}_2 und den zugehörigen Verzerrungstensen $\mathfrak{B}_1 = \mathfrak{B}(\mathfrak{S}_1)$, $\mathfrak{B}_2 = \mathfrak{B}(\mathfrak{S}_2)$, $\mathfrak{B}_3 = \mathfrak{B}(\mathfrak{S}_1\mathfrak{S}_2)$ eine eindeutig umkehrbare Funktion $f(x)$ existiert mit $f(\mathfrak{B}_1) + f(\mathfrak{B}_2) = f(\mathfrak{B}_3)$. 4. Für infinitesimale Deformationen $\mathfrak{G} + d\mathfrak{B}$ in Cartesischen Koordinaten geht der Verzerrungstensor über in $\frac{1}{2}(d\mathfrak{B} + d\mathfrak{B}) + o(d\mathfrak{B})$, wo $o(x)$ das bekannte Symbol und allgemein \mathfrak{B} die zu \mathfrak{B} transponierte Matrix bedeutet. Zerlegt man in Cartesischen Koordinaten \mathfrak{A} in ein Produkt aus einer reinen Streckung \mathfrak{S} mit 3 reellen positiven Eigenwerten und einer Euklidischen Transformation, so führen obige Postulate auf $\mathfrak{B} = g(\ln \mathfrak{S})$, wo $g(x)$ die Umkehrfunktion von $f(x)$ ist und für kleine x die Form $x + o(x)$ annimmt. Im einfachsten Falle ist $f \equiv x \equiv g$ zu setzen, was auf Henckys Ansatz führt. Die Übertragung auf krummlinige Koordinaten liefert dann nach Wahl einen kovarianten, kontravarianten oder gemischten Tensor, im letzteren Falle wird $\mathfrak{B} = g(\mathfrak{Q}^*)$ mit $\mathfrak{Q}^* = \frac{1}{2} \ln(\mathfrak{G}\mathfrak{A}\mathfrak{G}^{-1}\mathfrak{A})$, wo \mathfrak{G} der auf die Endlage bezogene Fundamentaltensor ist. Hierin ist allgemein f und g als Funktion eines Tensors wieder ein Tensor und z. B. gegeben als eine konvergente unendliche Reihe mit tensoriellem Argument. — Der Logarithmus der Volumendehnung ist dann gegeben durch $\{f(\mathfrak{B})\}$, d. h. die Spur von $f(\mathfrak{B})$. — Der von Trefftz eingeführte, sonst übliche Verzerrungstensor in gemischter Form genügt den obigen Postulaten für die Superpositionsfunktion $f(x) = -\frac{1}{2} \ln(1 - 2x)$. — Der Verzerrungsdeviator \mathfrak{D} wird aus dem Verzerrungstensor abgeleitet durch die Forderungen, daß zwei Deformationen, die sich nur um eine Ähnlichkeitstransformation unterscheiden, den gleichen Deviator haben und daß der Tensor einer volumentreuen Deformation mit seinem Deviator identisch ist. Bezeichnet allgemein $\tilde{\mathfrak{B}}$ die gewöhnliche Deviatorbildung bezüglich \mathfrak{B} , so wird $\mathfrak{D} = g(\tilde{\mathfrak{Q}}^*)$. Die Diskussion der zu $\tilde{\mathfrak{Q}}$ gehörigen charakteristischen Gleichung gibt Aufschluß über die physikalische Bedeutung des Verhältnisses $\{\tilde{\mathfrak{Q}}^2\}^2$ zu $\{\tilde{\mathfrak{Q}}^2\}^3$ und zeigt, daß $\sqrt{\{\tilde{\mathfrak{Q}}^2\}}$ allgemein als Maß für die Beanspruchung anzusehen ist in Übereinstimmung mit der üblichen Festsetzung bei infinitesimalen Formänderungen. — Die Spannungen bezieht Verf. auf das unverformte Flächenelement und definiert den Spannungstensor aus der Forderung, daß 1. in cartesischen Koordinaten die auf ein Flächenelement $d\mathfrak{f}_0$ wirkende Kraft $d\mathfrak{f}_0$ gegeben ist durch $d\mathfrak{f}_0 = \mathfrak{P}_0 d\mathfrak{f}_0$, 2. in krummlinigen Koordinaten \mathfrak{P} ein Tensor (bzw. eine Tensordichte) ist, 3. daß bei Verschiebung des Flächenelementes um $d\mathfrak{z}$ die Arbeit $dA = d\mathfrak{z} \cdot \mathfrak{P} d\mathfrak{f}$ geleistet wird. Daraus ergibt sich eine Darstellung für \mathfrak{P} mit Hilfe von \mathfrak{P}_0 als gemischter oder zweifach kontravarianter Tensor. Im 1. Falle ist jedoch \mathfrak{P} nicht mehr zugleich mit \mathfrak{P}_0 symmetrisch. — Die Berechnung der Arbeitsleistung bei infinitesimaler Verzerrung führt auf die bekannten Formeln und zeigt den Vorteil der Verwendung gemischter Tensoren.

Moufang (Frankfurt a. M.).

Hodge, P. and W. Prager: A variational principle for plastic materials with strain-hardening. J. Math. Physics, Massachusetts **27**, 1—10 (1948).

In Verallgemeinerung eines früheren Ansatzes von Handelman und Prager [vgl. dies. Zbl. **29**, 173] und analog zum Ansatz von E. Melan [Zbl. Mech. **7**, 303] wird für plastisches Material mit Verfestigung das Spannungs-Dehnungs-Gesetz in der differentiellen Gestalt (*) $\dot{\varepsilon}_{ij} = \dot{\varepsilon}_{ij}^{(0)} + \frac{1}{2} F \cdot \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \cdot (\dot{f} + |f|)$ angenommen.

Hierbei ist (ε_{ij}) der Verzerrungstensor, $(\dot{\varepsilon}_{ij}^{(0)})$ die zeitliche Änderung von (ε_{ij}) bei Gültigkeit des Hookeschen Gesetzes, (σ_{ij}) der Spannungstensor, F eine positive Invariante des Spannungstensors und f eine positiv definite invariante Form des

Spannungsdeviators. $f' > 0$ heißt „Belastung“, $f' < 0$ „Entlastung“. Es werden nur solche Zustände zugelassen, die nach Durchlaufen einer Belastung und höchstens einer (vollständigen oder teilweisen) Entlastung entstehen. — (*) erfüllt die Bedingung der Irreversibilität der plastischen Verformung. — Zunächst wird der Beweis von Melan, daß bei vorgegebenen variablen Oberflächenkräften und vernachlässigbaren Trägheitskräften die Spannungsänderungen im Innern eindeutig bestimmt sind, in mathematisch klarerer Formulierung wiederholt. Das anschließend bewiesene Haupttheorem lautet: Es seien bei vorgegebenen Änderungen der Oberflächenkräfte eines geschlossenen Volumens $\dot{\sigma}_{ij}$ und $\dot{\epsilon}_{ij}$ die wahren Spannungs- und Dehnungsänderungen; $\dot{\sigma}'_{ij}$ willkürliche Spannungsänderungen, die die Gleichgewichts- und Randbedingungen erfüllen; $\dot{\epsilon}'_{ij}$ gemäß (*) zu den $\dot{\sigma}'_{ij}$ gehörig. Dann ist:

$$\sum_{ij} \int \dot{\epsilon}_{ij} \dot{\sigma}_{ij} dv < \sum_{ij} \int \dot{\epsilon}'_{ij} \dot{\sigma}'_{ij} dv$$

falls die $\dot{\sigma}'_{ij}$ den $\dot{\sigma}_{ij}$ infinitesimal benachbart sind (relatives Minimum). Die Ungleichheit gilt noch für beliebige $\dot{\sigma}'_{ij}$, für die in allen Teilgebieten Entlastung stattfindet, in denen die $\dot{\sigma}_{ij}$ Entlastung liefern (absolutes Minimum). — Ein analoges Minimaltheorem gilt bei gemischten Randbedingungen, wo längs eines Teiles der Oberfläche die Außenkräfte und längs des Restteiles die Geschwindigkeiten vorgeschrieben sind.

Hans Richter (Haltingen/Lörrach).

Philips, Aris: Calculation of the displacements in plastic torsion. J. Math. Physics, Massachusetts 27, 270—273 (1949).

Die plastische Torsion eines prismatischen Stabes aus inkompressiblem, verfestigungsfähigem Material wird berechnet auf Grund des Formänderungsgesetzes von de St.-Venant-Mises, nach dem Spannungsdeviator \mathfrak{P}' und Verzerrungsdeviator \mathfrak{S}' artgleich sind, und des Verfestigungsgesetzes von R. Schmidt, nach dem die 2. Invariante von \mathfrak{S}' nur eine Funktion der 2. Invarianten von \mathfrak{P}' ist. Setzt man alle Spannungskomponenten Null außer τ_{xz} und τ_{yz} , so sind die Gleichgewichtsbedingungen erfüllt durch den Ansatz

$$\tau_{xz} = \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial y}, \quad \tau_{yz} = -\frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial x}.$$

Auf Grund des Formänderungsgesetzes lassen sich auch die zugehörigen Schiebungen durch die Ableitungen von Φ darstellen. Die Verträglichkeitsbedingung für die Schiebungen ergibt dann eine nicht lineare partielle Differentialgleichung 2. Ordnung für $\Phi(x, y)$, die von der Verfestigungsfunktion abhängt. Kennt man für einen gegebenen Querschnitt die Spannungsfunktion Φ , so lassen sich die Verschiebungskomponenten bestimmen durch Integration der Gleichungen, die zwischen den Verzerrungen und den Verschiebungsableitungen bestehen. Ist der Querschnitt ein schmales Rechteck und wird die Verfestigungsfunktion als kubische Parabel angenommen, so läßt sich die Differentialgleichung für Φ mit dem Ansatz $\frac{\partial \Phi}{\partial y} = 0$

integrieren; jede Verschiebungskomponente wird dann proportional zum Produkt zweier Koordinaten.

Moufang (Frankfurt a. M.). *

Symonds, P. S.: On the general equations of problems of axial symmetry in the theory of plasticity. Quart. appl. Math. 6, 448—452 (1949).

Das achsialsymmetrische Problem in Zylinderkoordinaten ist bei Zugrundelegung der Misesschen Fließbedingung ohne zusätzliche Spezialisierung auf 2 gleiche Hauptspannungen statisch unbestimmt. Als Formänderungsgesetz wird der Ansatz von de St.-Venant-Mises herangezogen. Für die 3 wesentlichen Komponenten des Spannungsdeviators und den Proportionalitätsfaktor, der in das Verformungsgesetz eingeht, lassen sich 4 partielle quasilineare Differentialgleichungen 2. Ordnung aufstellen, indem man die Fließbedingung zweimal nach z differenziert, die mittlere Normalspannung aus den beiden Gleichgewichtsbedingungen eliminiert und die beiden Verträglichkeitsbedingungen in den Spannungen ausdrückt. Eli-

minierte man in diesem System von 4 partiellen Differentialgleichungen die gemischte Ableitung einer unbekannten Funktion und ihre zweite Ableitung nach r mit Hilfe der zweiten Ableitung nach z dieser Funktion längs einer Kurve $z = z(r)$, so lautet die Bedingung, daß diese Kurve Charakteristik des Systems ist, daß die Determinante, gebildet aus den Koeffizienten der 2. Ableitungen der unbekannten Funktionen nach z , verschwindet. Daraus ergibt sich, daß die Kurve $z = z(r)$ nur reell ist, wenn ein ebener Verzerrungszustand vorliegt. Die in der Gasyndamik nützliche Methode zur numerischen Integration der gegebenen Differentialgleichungen mit Hilfe des Netzes der Charakteristiken ist also im allgemeinen Fall hier nicht anwendbar.

Moufang (Frankfurt a. M.).

Krall, G.: *Statica dei mezzi elastici cosiddetti „viscosi“*. I. Atti Accad. naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. fisic. mat. natur., VIII. s. 2, 233—237 (1947).

In dem allgemeinen Ansatz für Nachwirkungsvorgänge ergibt sich die Verschiebung $w(t)$ unter Einwirkung einer Kraft $P(t)$, falls die Nachwirkung durch den Kern $\Phi(t, \tau)$ bestimmt ist, in der Form

$$w(t) = kP(t) + \int_{-\infty}^t P(\tau) \Phi(t, \tau) d\tau.$$

Im folgenden wird $\Phi(t, \tau)$ in der speziellen Form $ae^{-\beta\tau}$ zugrunde gelegt; der Beginn der Zählung von τ ist dabei der Zeitpunkt, an dem das frische Material zu Konstruktionszwecken verwendet wird. Dieser Ansatz für Φ scheint geeignet, die Erfahrungen beim Verhalten von noch nicht ausgealterter Schamotte unter konstanter Belastung zu beschreiben, z. B. bei der Bogenkonstruktion im Brückenbau. Die Erfahrung, daß der Elastizitätsmodul im Bereich der Nachwirkungserscheinungen von seinem effektiven Wert um den Faktor $(1 + \alpha(1 - e^{-\beta t}))$ reduziert ist mit passendem α, β , führt zu dem Ansatz

$$w(t) = kP(t) + k\alpha \int_0^t e^{-\tau} P(\tau) d\tau.$$

Unter Heranziehung der Einflußfunktion $G(x, y)$ (Greensche Funktion des Problems) zu einer kontinuierlichen Belastung $p(\xi)$ ergibt sich so für die Durchbiegung eines Trägers der Länge L an der Stelle x bei zeitlich variabler Belastung

$$w(x, t) = \int_0^L G(x, \xi) p(\xi, t) d\xi + \int_0^t \Phi(\tau) \int_0^L G(x, \xi) p(\xi, \tau) d\xi d\tau.$$

Moufang (Frankfurt a. M.).

Krall, G.: *Statica dei mezzi elastici viscosi e sue applicazioni*. II. Atti Accad. naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. fisic. mat. natur., VIII. s. 2, 371—377 (1947).

Die in vorstehendem Referat durchgeführten Überlegungen werden auf den Fall zusätzlicher achsialer Belastung erweitert, die in der Form $\lambda n(\xi)$ gegeben sei, $\lambda =$ gegebene Konstante, $n(\xi) > 0$. Ist $p(\xi)$ die transversale Last, so ist die statische Durchbiegung unter der kombinierten Beanspruchung zunächst

$$w = \int_0^L G(x, \xi) p(\xi) d\xi + \lambda \int_0^L n(\xi) \frac{\partial G}{\partial \xi} \frac{\partial w}{\partial \xi} d\xi,$$

woraus sich für $\omega = \partial w / \partial x$ eine Integralgleichung von Fredholmschem Typus ergibt mit symmetrischem, positiv definitem Kern

$$\omega(x) = \omega_0(x) + \lambda \int_0^L n(\xi) \Omega(x, \xi) \omega(\xi) d\xi.$$

Die zugehörige homogene Gleichung mit parametrigem λ besitzt unendlich viele nicht triviale Eigenfunktionen ω_ϱ , die für die Belegung $n(\xi)$ orthogonal sind, und unendlich viele Eigenwerte λ_ϱ . Für $n(x) \equiv 1$ ist beim einseitig gestützten Schaft

$$\lambda_\varrho = \varrho^2 \pi^2 \frac{EJ}{L^2}, \quad \omega_\varrho = \sqrt{\frac{2}{L}} \cos \frac{n\pi}{L} x.$$

Die Lösung der inhomogenen Gleichung erfolgt in bekannter Weise durch Reihenentwicklung nach den Eigenfunktionen des homogenen Problems $\omega = \sum A_\varrho \omega_\varrho$. Die Lösung ist stabil für $\lambda \neq \lambda_\varrho$ ($\varrho = 1, 2, \dots$) und $\lambda < \lambda_1$. Die Berücksichtigung von Nachwirkungserscheinungen zum Kern $\Phi(\tau)$ vollzieht sich nun analog wie im 1. Teil durch den Ansatz

$$\omega(x, t) = \omega_0(x, t) + \lambda \int_0^L n(\xi) \Omega(x, \xi) \omega(\xi, t) d\xi \\ + \int_0^t \Phi(\tau) \omega_0(x, \tau) d\tau + \lambda \int_0^t \Phi(\tau) \int_0^L n(\xi) \Omega(x, \xi) \omega(\xi, \tau) d\tau d\xi.$$

Durch Differentiation nach t entsteht eine Integrodifferentialgleichung, der Ansatz $\omega(x, t) = \sum A_\varrho(x) \omega_\varrho(x)$ liefert daraus für $A_\varrho(t)$ eine gewöhnliche lineare Differentialgleichung 1. Ordnung für $A_\varrho(t)$; diejenige Lösung, die für $t = 0$ in den Wert A_ϱ des statischen Problems übergeht, ist aufzusuchen. Damit ist $\omega(x, t)$ bestimmt und daraus $w(x, t)$ durch Integration nach x . — Die Sicherheit der Konstruktion wird erhöht, wenn λ_1 im Vergleich zu λ groß ist (Verf. nennt die Zahlen λ_ϱ die „kritischen Multiplikatoren der Achsialbelastung“). — Zum Schluß wird kurz die Gefahr des nicht elastischen Nachgebens der Auflager und der Einfluß Volterrascher Distorsionen bei Konstruktionen aus zähem Material erörtert.

Moufang.

Rivlin, R. S.: The hydrodynamics of non-Newtonian fluids. I. Proc. R. Soc. London A 193, 260—281 (1948).

Es werden die allgemeinsten Beziehungen zwischen den Tensoren der Spannungen und Dehnungs-Geschwindigkeiten abgeleitet, die für eine inkompressible visco-elastische Flüssigkeit möglich sind, die sich in stationärer Bewegung befindet. Wenn diese Beziehungen bekannt sind, so können die Bewegungsgleichungen und Randbedingungen erhalten werden. Zur Darstellung dieser Beziehungen wird eine Dissipationsfunktion eingeführt (die mit der Rayleighschen nicht identisch ist). Zwei solcher laminarer Strömungsprobleme werden in allen Einzelheiten untersucht: 1. die horizontale Bewegung einer zylindrischen Flüssigkeitsmasse, die durch Kräfte auf ihre Endflächen erzeugt wird und 2. die laminare Strömung einer Flüssigkeitsmasse, die sich zwischen zwei koaxialen Zylindern befindet, die mit verschiedenen Drehgeschwindigkeiten umlaufen. Es wird gezeigt, daß in beiden Fällen auch Normalkräfte auf die ebenen Grenzflächen übertragen werden müssen, um die Bewegung zu erzeugen — im Gegensatz zur Newtonschen Theorie. Th. Pöschl.

Hydrodynamik:

Manarini, M.: Sui paradossi di d'Alembert e di Brillouin nella dinamica dei fluidi. Atti Accad. naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. fisic. mat. natur., VIII., s. 4, 427—433 (1948).

Verf. weist — ausgehend von den Vektorformeln von Boggio und in Ergänzung der Ergebnisse von Cisotti — nach, daß das Paradoxon von d'Alembert fehlenden Widerstandes und das von Brillouin für das Vorhandensein von Bezirken negativen Druckes für beliebige Körperformen in vollkommen zusammen-drückbaren Flüssigkeiten auch dann bestehen bleiben, wenn die sich ins Unendliche erstreckende Flüssigkeit von Diskontinuitätsflächen durchsetzt ist, sofern der Druck p und die absolute Geschwindigkeit v der Flüssigkeitsteilchen gewissen mittleren Verschwindungsbedingungen im Unendlichen genügen, wie sie analog in der Potentialtheorie gefordert werden. — Nach Transformierung der Vektorgleichungen im 1. Abschnitte mittels bekannter Integralformeln wird dann im 2. Abschnitt die Existenz des d'Alembertschen Paradoxons für die oben genannten allgemeinen Bedingungen bei gleichförmiger Schraubenbewegung des Körpers nachgewiesen, während im 3. Abschnitt das Paradoxon, das Brillouin für das zweidimensionale und in Erweiterung Duhem für das dreidimensionale Problem herleiteten, auch für die oben erwähnten allgemeineren Bedingungen als fortbestehend nachgewiesen

wird, obwohl natürlich auch hier rein physikalisch die Existenz von Bezirken negativen Druckes verneint werden muß. *Karas (Darmstadt).*

Ursell, F.: The effect of a fixed vertical barrier on surface waves in deep water. Proc. Cambridge philos. Soc. **43**, 374—382 (1947).

Es wird die Reflexion von Oberflächenwellen einer reibungsfreien, inkompressiblen, tiefen Flüssigkeit an einer vertikalen, festen Ebene untersucht. Die reflektierende Ebene ($x = 0$) ist in der Flüssigkeit durch eine horizontale Kante begrenzt ($y = -a$) und reicht von $y = 0$ bis $y = -a$ bzw. von $y = -\infty$ bis $y = -a$, wenn y die vertikale, x eine horizontale Achse kennzeichnet und $y = 0$ der Flüssigkeitsoberfläche entspricht. Es wird eine Integralgleichung für die Normalkomponente der Geschwindigkeit auf der Ebene $x = 0$ aufgestellt, und es werden Ausdrücke für den Reflexions- bzw. Durchlaßkoeffizienten gewonnen. Die erhaltenen Ergebnisse werden diskutiert. *Müller (Mainz).*

Scholkemeier, Friedrich-Wilhelm: Lösung der Prandtl'schen Grenzschicht-differentialgleichungen mit Hilfe von Potenzreihenentwicklungen. Arch. Math., Oberwolfach **1**, 270—277 (1949).

Für axial angeströmte, rotationssymmetrische Körper hat Frössling [Verdunstung, Wärmeübergang und Geschwindigkeitsverteilung bei zweidimensionaler und rotationssymmetrischer laminarer Grenzschichtströmung. Lunds Univ. Årsskr., Avd. II **36**, 32 (1940)] die Prandtl'schen Grenzschichtgleichungen näherungsweise gelöst, indem er eine zweckmäßig definierte Stromfunktion nach (ungeraden) Potenzen der Wandbogenlänge entwickelte, die Bestimmung der Koeffizienten auf die Lösung gewöhnlicher, vom speziellen Problem unabhängiger Differentialgleichungen zurückführte und die numerische Rechnung für die ersten drei Koeffizienten durchführte. In der vorliegenden Arbeit, die einen Abschnitt aus der Dissertation der T. H. Braunschweig, „Die laminare Reibungsschicht an rotationssymmetrischen Körpern“ wiedergibt, werden die Differentialgleichungen der für den vierten Koeffizienten benötigten zehn universellen Beiwertfunktionen angegeben und die Resultate der numerischen Integration in Tabellenform mitgeteilt. *Weissingen.*

García, Godofredo: Sur une formule exacte, cardinale et canonique des tensions internes et sur l'équation cardinale, canonique du mouvement des fluides visqueux. Ann. Soc. Polonaise Math. **21**, 107—113 (1948).

Verf. knüpft an seine ältere Arbeit in den Actas Acad. nac. Ci. exáct. físic. nat. Lima **10**, fasc. III u. IV (1947) an, in der er für die Spannung in zähen Flüssigkeiten bei endlichen Deformationen einen Ausdruck gegeben hat, der auch quadratische Glieder der räumlichen Ableitungen des Geschwindigkeitsvektors enthält, aber nur einen Zähigkeitskoeffizienten. Jetzt werden unter Annahme eines sich drehenden Koordinatensystems die Bewegungsgleichungen aufgestellt und im Falle ebener Bewegung in ihnen isometrische Koordinaten eingeführt. Ref. beanstandet für die ganze Theorie die Addition von Größen verschiedener Dimension. *Hamel.*

Sauer, Robert: Beziehungen zwischen der Theorie der Flächenverbiegung und der Gasdynamik. Arch. Math., Oberwolfach **1**, 263—269 (1949).

Verf. betrachtet im Falle einer stationären, isentropischen Gasströmung in der x, y -Ebene die aus der Bernoullischen Gleichung hervorgehenden „Druckflächen“ $p = f(u^2 + v^2)$ (u, v Komponenten der Gasgeschwindigkeit, p Druck). Dann gilt: jede infinitesimale Verbiegung der Druckfläche mit nicht entartetem Drehriß liefert eine stationäre, zweidimensionale Gasströmung in der x, y -Grundrißebene des Drehrißes. Der Drehriß ist die Stromfunktion dieser Strömung, seine Höhenlinien projizieren sich als Bahnlinien der Strömung. Umgekehrt gehört zu jeder stationären, zweidimensionalen Gasströmung der x, y -Ebene mit nicht entartetem u, v -Bild eine infinitesimale Verbiegung der Druckfläche. Ferner betrachtet Verf. die im Falle einer nichtstationären, eindimensionalen, isentropischen Gasströmung aus der Bernoullischen Gleichung hervorgehenden Druckflächen $p = g(q + u^2/2)$,

(u Gasgeschwindigkeit, i = Enthalpie, $-q = u^2/2 + i$). Dann gilt: jede infinitesimale Verbiegung der Druckfläche mit nicht entartetem Drehriß liefert eine nichtstationäre, eindimensionale Gasströmung in der x, t -Grundrißebene des Drehrisses als Weg-Zeit-Ebene. Der Drehriß ist die Stromfunktion dieser Strömung, seine Höhenlinien projizieren sich als Bahnlinien der Strömung. Umgekehrt gehört zu jeder nichtstationären, eindimensionalen Gasströmung mit nicht entartetem u, q -Bild eine infinitesimale Verbiegung der Druckfläche. Demnach erscheint das Problem der isentropischen Gasströmungen (mit beliebiger Adiabaten Gleichung $\rho = \rho(p)$) äquivalent mit dem Problem der infinitesimalen Verbiegung beliebiger Drehflächen und beliebiger Parabelschiebflächen (vgl. H. Behrbohm, Zur Theorie der kompressiblen Potentialströmungen. Diss. Göttingen 1944). Da ferner jede infinitesimale Verbiegung einer Fläche mit einer Spannungsverteilung in der Fläche äquivalent ist, ergibt sich eine weitere Deutung für die entwickelte Theorie. Während die Druckflächen $p = g(q + u^2/2)$ stets negativ gekrümmt sind, bestehen für die Druckflächen $p = f(u^2 + v^2)$ positiv und negativ gekrümmte Bereiche, je nachdem ob sie über dem Unterschallbereich der u, v -Ebene liegen oder über deren Überschallbereich. Weiterhin untersucht Verf. den Fall negativ gekrümmter Druckflächen eingehender und behandelt schließlich als Beispiele stationäre Quellen, Wirbel, Wirbelquellen sowie stationäre und nichtstationäre Strömungen des hypothetischen Tschaplygin-Gases. M. Pinl (Köln).

Cherry, T. M.: Flow of a compressible fluid about a cylinder. II. Flow with circulation. Proc. R. Soc. London A 196, 1—31 (1949).

Im Anschluß an den ersten Teil dieser Arbeit [dies. Zbl. 29, 176], der der zirkulationsfreien Strömung gewidmet war, wird hier der Fall der nichtverschwindenden Zirkulation behandelt. Im Unendlichen wird Unterschallgeschwindigkeit angenommen; den Betrachtungen liegt auch hier wieder die Hodographenmethode zugrunde. Da sich im zirkulationsfreien Fall im Ausdruck für das Geschwindigkeitspotential der der inkompressiblen Strömung entsprechende Bestandteil isoliert angeben läßt, liegt der Gedanke nahe, zunächst auch hier diesen Bestandteil zu bestimmen, und zwar für so kleine Zirkulationen, daß zwei Staupunkte auf der Oberfläche entstehen. In sinngemäßer Verallgemeinerung der Methoden des ersten Teiles gelangt Verf. dann zu einer Lösung des kompressiblen Problems, die allerdings im allgemeinen mehrdeutig ist. Um zu einer eindeutigen Lösung zu kommen, wird eine weitere (mehrdeutige) Lösung addiert, die unendlich viele noch offene Konstanten enthält, die sich in passender Weise aus einem System von unendlich vielen linearen Gleichungen bestimmen lassen. Die der Strömung entsprechende Zylinderkontur ist auch hier bei kleiner Anströmgeschwindigkeit nahezu kreisförmig. Maruhn.

Cherry, T. M.: Numerical solutions for transonic flow. Proc. R. Soc. London A 196, 32—36 (1949).

Auf Grund der im ersten Teil der vorstehenden Arbeit [dies. Zbl. 29, 176] angegebenen Formeln wurden im zirkulationsfreien Fall mit $\gamma = 1,405$ und mit einer Machschen Zahl für die ungestörte Strömung von 0,510 einige Beispiele durchgerechnet und die Stromlinien sowie die Kurven gleicher Geschwindigkeit aufgetragen. Maruhn (Dresden).

Thomas, T. Y.: On the stability and instability of shock waves. Proc. nat. Acad. Sci. USA 34, 526—530 (1948).

Verf. behandelt anliegende Stoßwellen in der stationären zweidimensionalen Überschallströmung. Er schließt aus gewissen Beziehungen der Profilkrümmung und höherer Ableitungen derselben auf Instabilität des Stoßes, wenn die Mach-Zahl hinter dem Stoß ≤ 1 ist. Ähnliche früher von L. Crocco (Aerotecnica 1937) gefundene Ergebnisse wurden von G. Guderley [vgl. Appl. Mech. Rev. 2, 13 (1949)] in Frage gestellt und sind inzwischen von H. Richter verschärft worden (Aerotecnica 1949). Sauer (München).